

ГЕОМЕТРИЯ



9 КЛАСС

ТЕТРАДЬ-ТРЕНАЖЁР



Т.В. Сиротина

ГЕОМЕТРИЯ

9 КЛАСС

ТЕТРАДЬ-ТРЕНАЖЁР

2-е издание, электронное



Москва
Издательство «Интеллект-Центр»
2025

УДК 514(075.3)
ББК 22.12я721
С40

Рецензент:

В. Б. Крамчаткин – учитель математики проекта «Математическая вертикаль»
ГБОУ г. Москвы «Школа № 158»

Сиротина, Т. В.

С40 Геометрия. 9 класс. Тетрадь-тренажёр / Т. В. Сиротина. — 2-е изд., эл. — 1 файл pdf : 105 с. — Москва : Издательство «Интеллект-Центр», 2025. — Систем. требования: Adobe Reader XI либо Adobe Digital Editions 4.5 ; экран 10". — Текст : электронный.

ISBN 978-5-907931-85-5

Тетрадь-тренажёр — это уникальное пособие, помогающее формировать необходимые навыки для выполнения различных видов заданий по геометрии, своевременно выявлять и устранять пробелы в знаниях. Все задания удобно систематизированы в виде таблиц, а выполнять их решение можно непосредственно в тетради-тренажёре. Материалы ориентированы на учебник «Математика. Геометрия: 7–9 классы: базовый уровень» (Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф., Кадомцев С. Б. и др.), включённый в Федеральный перечень учебников. Также возможно применение этих материалов с другими учебниками по геометрии 9-го класса.

Пособие адресовано учителям математики, репетиторам, учащимся и их родителям.

УДК 514(075.3)
ББК 22.12я721

Электронное издание на основе печатного издания: Геометрия. 9 класс. Тетрадь-тренажёр / Т. В. Сиротина. — Москва : Издательство «Интеллект-Центр», 2024. — 104 с. — ISBN 978-5-907750-50-0. — Текст : непосредственный.

В соответствии со ст. 1299 и 1301 ГК РФ при устранении ограничений, установленных техническими средствами защиты авторских прав, правообладатель вправе требовать от нарушителя возмещения убытков или выплаты компенсации.

ISBN 978-5-907931-85-5

© ООО «Издательство «Интеллект-Центр», 2024
© Сиротина Т. В., 2024

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	4
ВЕКТОРЫ	5
Понятие вектора. Длина вектора	5
Коллинеарные векторы. Равенство векторов	12
Сумма векторов. Вычитание векторов	18
Произведение вектора на число	23
МЕТОД КООРДИНАТ.....	30
Координаты вектора	30
Простейшие задачи в координатах	37
Уравнения окружности и прямой	42
СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ТРЕУГОЛЬНИКА. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ	47
Синус, косинус, тангенс, котангенс угла	47
Теорема о площади треугольника.....	53
Теорема синусов	59
Теорема косинусов.....	61
Скалярное произведение векторов	68
ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ И ПЛОЩАДЬ КРУГА.....	79
Правильный многоугольник	79
Длина окружности. Площадь круга	84
ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПЛОСКОСТИ. ДВИЖЕНИЯ.....	88
Движение плоскости	88
Симметрии фигур	92
ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПОДОБИЯ. ПОДОВИЕ ФИГУР.....	95
Подобие многоугольников. Гомотетия	95
ОТВЕТЫ.....	99

ПРЕДИСЛОВИЕ

Тетрадь-тренажёр продолжает серию пособий, предназначенных помочь учащимся средней школы освоить школьную программу по математике. По окончании девятого класса школьники сдают экзамен и получают основное среднее образование. Материал этого года обучения рассчитан на то, что в предыдущие два года изучения геометрии учащиеся освоили необходимые темы и могут перейти на новый уровень познания свойств фигур на плоскости. Девятиклассники получают возможность открыть для себя те стороны геометрии, которые позволят им продолжить изучение геометрии в старших классах. 9-й класс – третий год изучения геометрии. Своевременное усвоение новых тем, отсутствие пробелов в знаниях и получение новых умений – это залог не только успешной учёбы в 9-м классе, но и возможность удачного прохождения экзаменационных испытаний по математике и в дальнейшем получения среднего образования.

Основная цель этого пособия – сформировать у школьников базовые геометрические навыки, помочь выучить новые определения и свойства геометрических фигур и научить применять теорию при решении практических задач. Одним из способов преодоления трудностей при изучении геометрии является решение однотипных заданий, поиск ответов на многочисленные вопросы по заданной теме. Именно по такому принципу подобраны задания в этом уникальном сборнике, что и делает его настоящим помощником.

В тетради-тренажёре собраны примеры из личной практики автора, систематизированные в таблицы. Перед каждой из них сформулировано задание, которое предлагается выполнить учащемуся, а примеры расположены по принципу от простого к сложному. Чтобы достичь наилучшего результата, важно выполнять их последовательно. Буквы А, Б, В в некоторых номерах означают разноуровневые задания, объединённые общим вопросом, но каждое из них целесообразно проработать отдельно. Решения можно выполнять непосредственно в пособии. К заданиям приведены необходимые теоретические сведения «Важно знать» и «Указание». В тексте они отмечены знаком .

Образцы решения некоторых задач выделены затемнённым фоном. Каждый пункт заканчивается заданием «Проверьте себя», с помощью которого можно проверить степень усвоения необходимого теоретического материала и уровень подготовки к решению базовых задач по теме. В конце пособия к наиболее сложным заданиям даны ответы.

Тетрадь-тренажёр поможет:

УЧАЩИМСЯ 9 классов успешно усвоить новые темы, закрепить навыки, а также своевременно устранить пробелы в знаниях и уверенно сдать ОГЭ.

УЧАЩИМСЯ 10–11 классов повторить нужные темы по геометрии для успешной учёбы и подготовки к экзаменам, уверенно сдать ЕГЭ.

РОДИТЕЛЯМ оказать поддержку детям в закреплении школьного материала.

УЧИТЕЛЯМ проверить степень усвоения материала, выявить пробелы в знаниях и организовать индивидуальную работу с учащимися.

РЕПЕТИТОРАМ сформировать у школьников прочные навыки в выполнении различных видов заданий, основательно отработать с ними сложные моменты в отдельных темах, а также устранить пробелы в знаниях с максимальной эффективностью.

ВЕКТОРЫ

ПОНЯТИЕ ВЕКТОРА. ДЛИНА ВЕКТОРА

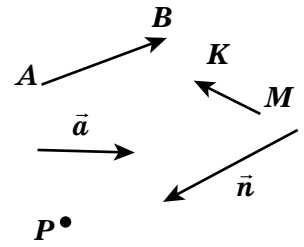


Важно знать:

• **Вектор или направленный отрезок** – это отрезок, для которого указано, какая из его граничных точек считается началом, а какая – концом.

• На рисунках вектор обозначается отрезком со стрелкой, показывающей направление вектора. Векторы обозначают двумя заглавными латинскими буквами со стрелкой над ними ($\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MK}$, где первая буква обозначает начало вектора, вторая – конец) или строчной латинской буквой ($\vec{a}$, $\vec{n}$).

• Любая точка плоскости – это **нулевой вектор**, обозначается символом $\vec{0}$ или, например, $\overrightarrow{PP}$, где P – точка плоскости.

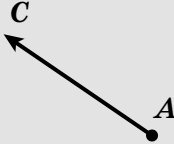
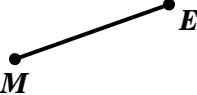
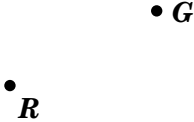


Задание 1. Заполните таблицу, используя данные рисунка.

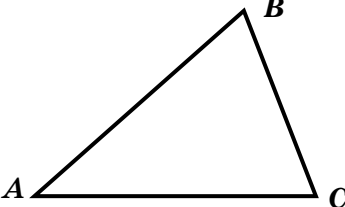
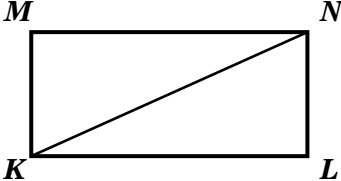
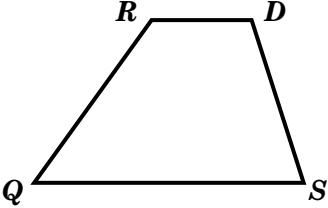
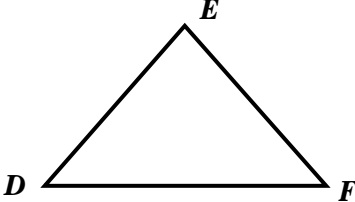
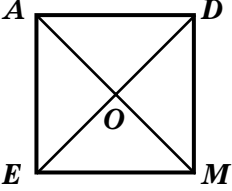
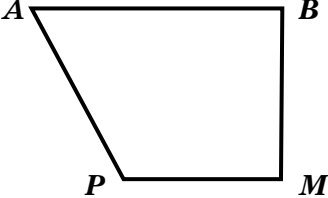
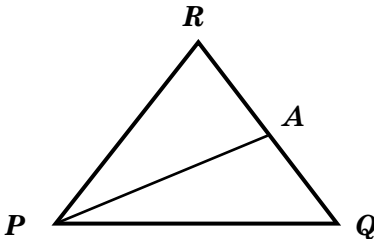
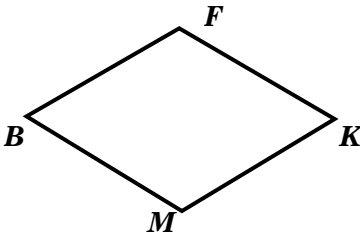
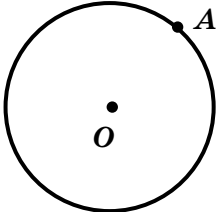
1) Вектор $\overrightarrow{AB}$, Начало вектора A, Конец вектора B.	4) Вектор _____ Начало вектора _____ Конец вектора _____	7) Вектор _____ Начало вектора _____ Конец вектора _____
2) Вектор _____ Начало вектора _____ Конец вектора _____	5) Вектор _____ Начало вектора _____ Конец вектора _____	8) Вектор _____ Начало вектора _____ Конец вектора _____
3) Вектор _____ Начало вектора _____ Конец вектора _____	6) Вектор _____ Начало вектора _____ Конец вектора _____	9) Вектор _____ Начало вектора _____ Конец вектора _____

Задание 2. Изобразите на рисунке заданный вектор.

А.

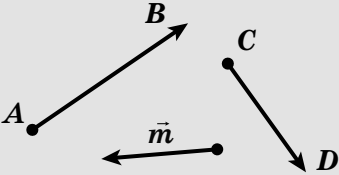
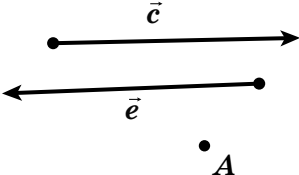
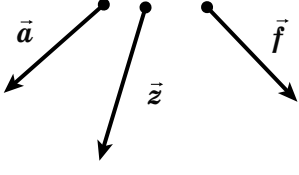
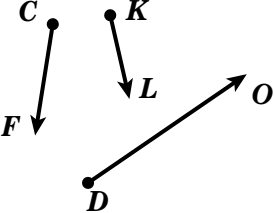
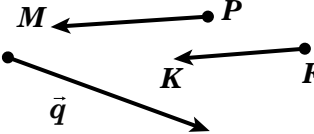
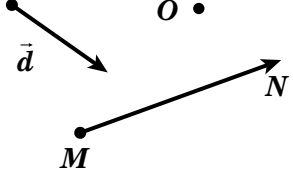
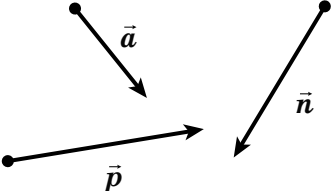
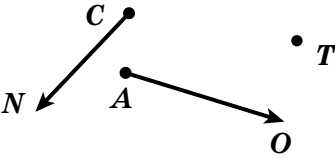
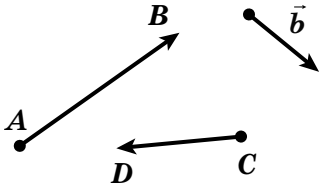
1) $\overrightarrow{AC}$ 	4) $\overrightarrow{OB}$ 	7) $\overrightarrow{TM}$	10) $\vec{a}$
2) $\overrightarrow{ME}$ 	5) $\overrightarrow{DN}$ 	8) $\overrightarrow{NN}$	11) $\vec{n}$
3) $\overrightarrow{FL}$ 	6) $\overrightarrow{GR}$ 	9) $\overrightarrow{KF}$	12) $\overrightarrow{VV}$

Б.

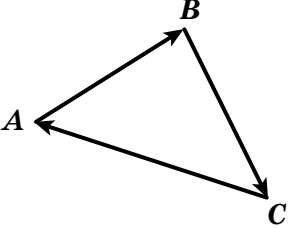
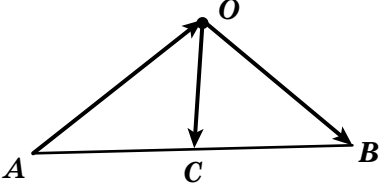
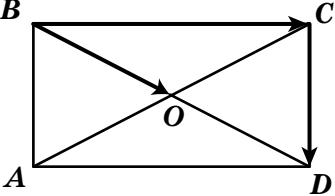
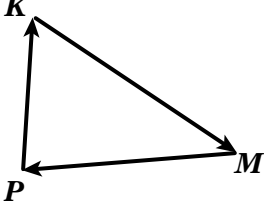
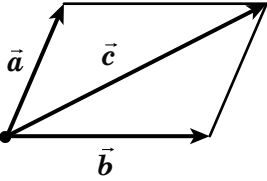
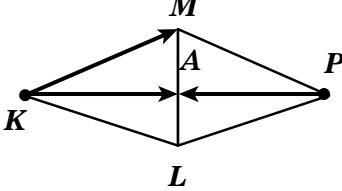
1) $\overrightarrow{AB}$ 	4) $\overrightarrow{KN}$ 	7) $\overrightarrow{QD}$ 
2) $\overrightarrow{FD}$ 	5) $\overrightarrow{OM}$ 	8) $\overrightarrow{MA}$ 
3) $\overrightarrow{AP}$ 	6) $\overrightarrow{BK}$ 	9) $\overrightarrow{OA}$ 

Задание 3. Запишите названия векторов, изображённых на рисунке.

А.

1)  Ответ: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\vec{m}$.	4)  Ответ: _____.	7)  Ответ: _____.
2)  Ответ: _____.	5)  Ответ: _____.	8)  Ответ: _____.
3)  Ответ: _____.	6)  Ответ: _____.	9)  Ответ: _____.

Б.

1)  Ответ: _____.	3)  Ответ: _____.	5)  Ответ: _____.
2)  Ответ: _____.	4)  Ответ: _____.	6)  Ответ: _____.



Важно знать:

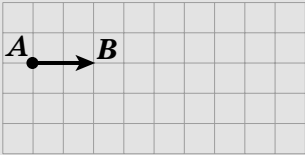
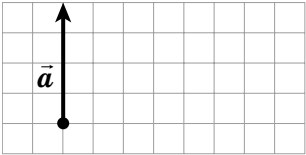
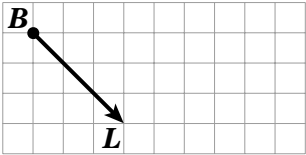
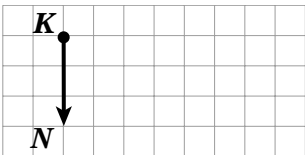
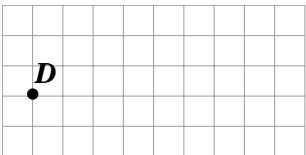
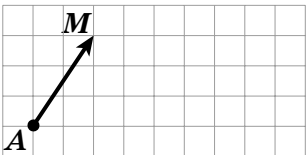
Длиной или **модулем** ненулевого вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB .

$|\overrightarrow{AB}|$ – длина вектора $\overrightarrow{AB}$, $|\vec{a}|$ – длина вектора $\vec{a}$.

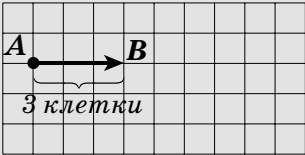
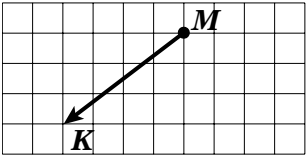
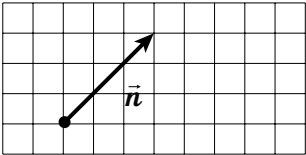
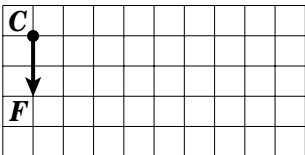
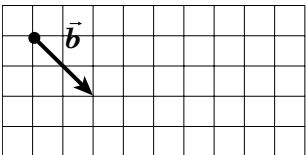
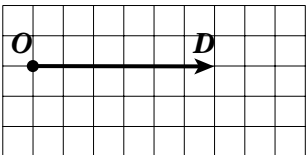
Длина нулевого вектора считается равной нулю $|\vec{0}| = 0$.

Задание 4. Найдите длину вектора, зная, что:

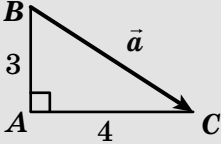
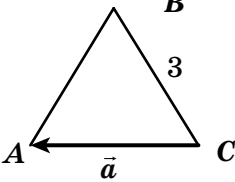
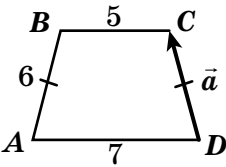
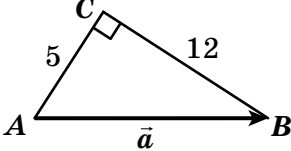
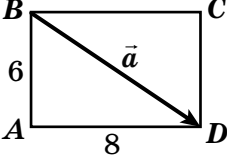
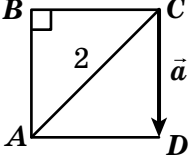
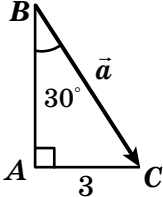
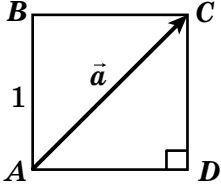
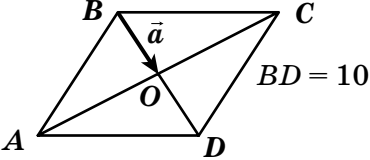
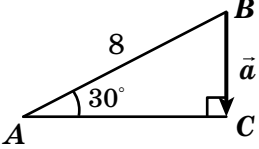
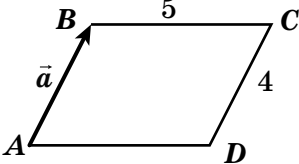
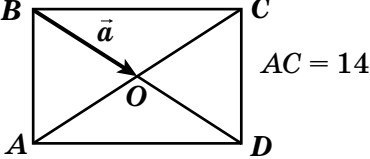
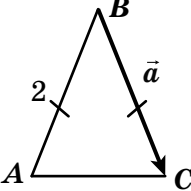
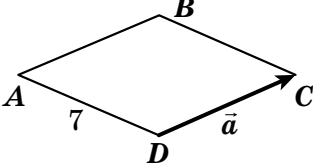
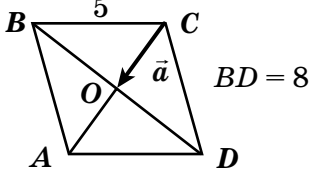
А. Размер клетки – 1 x 1.

1)  Ответ: $\overrightarrow{AB} = 2$.	3)  Ответ: _____.	5)  Ответ: _____.
2)  Ответ: _____.	4)  Ответ: _____.	6)  Ответ: _____.

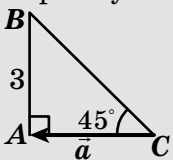
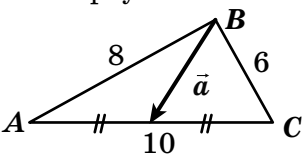
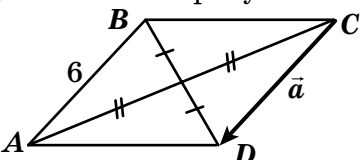
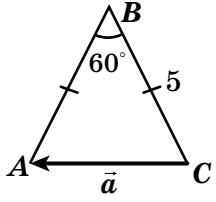
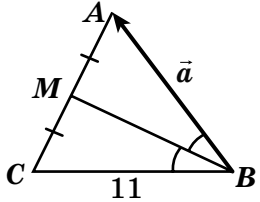
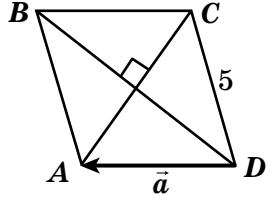
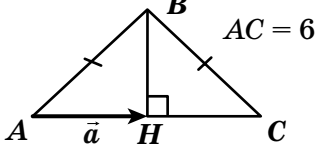
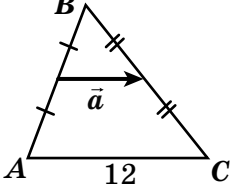
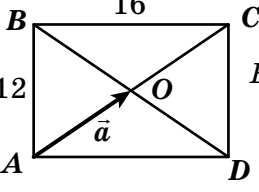
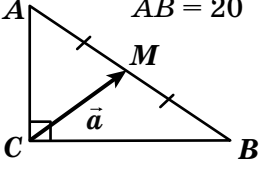
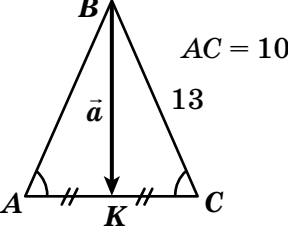
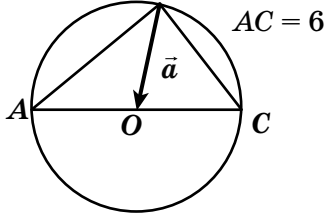
Б. Размер клетки – 2 x 2.

1)  $\overrightarrow{AB} = 3 \cdot 2 = 6$. Ответ: 6.	3)  Ответ: _____.	5)  Ответ: _____.
2)  Ответ: _____.	4)  Ответ: _____.	6)  Ответ: _____.

Задание 5. Найдите длину вектора $\vec{a}$, используя данные рисунка.
А.

1) $\triangle ABC$ – прямоугольный.  По теореме Пифагора $BC^2 = 3^2 + 4^2 = 25$, $BC = 5$. $\vec{a} = \overline{BC} = 5$. Ответ: $\vec{a} = 5$.	6) $\triangle ABC$ – равносторонний.  Ответ: $\vec{a} =$ _____.	11) $ABCD$ – равнобедренная трапеция.  Ответ: $\vec{a} =$ _____.
2) $\triangle ABC$ – прямоугольный.  Ответ: $\vec{a} =$ _____.	7) $ABCD$ – прямоугольник.  Ответ: $\vec{a} =$ _____.	12) $ABCD$ – квадрат.  Ответ: $\vec{a} =$ _____.
3) $\triangle ABC$ – прямоугольный.  Ответ: $\vec{a} =$ _____.	8) $ABCD$ – квадрат.  Ответ: $\vec{a} =$ _____.	13) $ABCD$ – параллелограмм.  Ответ: $\vec{a} =$ _____.
4) $\triangle ABC$ – прямоугольный.  Ответ: $\vec{a} =$ _____.	9) $ABCD$ – параллелограмм.  Ответ: $\vec{a} =$ _____.	14) $ABCD$ – прямоугольник.  Ответ: $\vec{a} =$ _____.
5) $\triangle ABC$ – равнобедренный.  Ответ: $\vec{a} =$ _____.	10) $ABCD$ – ромб.  Ответ: $\vec{a} =$ _____.	15) $ABCD$ – ромб.  Ответ: $\vec{a} =$ _____.

Б.

1) $\triangle ABC$ – прямоугольный.  $\triangle ABC$ – прямоугольный, $\angle A = 90^\circ$, $\angle C = 45^\circ$, значит, $\angle B = 45^\circ$, т.е. $\triangle ABC$ – равно- бедренный, BC – основание, $AC = AB = 3$. $\vec{a} = \overline{CA} = 3$. Ответ: $\vec{a} = 3$.	5) ABC – треугольник.  Ответ: $\vec{a} =$ _____.	9) $ABCD$ – четырёхугольник.  Ответ: $\vec{a} =$ _____.
2) $\triangle ABC$ – равнобедренный.  Ответ: $\vec{a} =$ _____.	6) ABC – треугольник.  Ответ: $\vec{a} =$ _____.	10) $ABCD$ – параллелограмм.  Ответ: $\vec{a} =$ _____.
3) $\triangle ABC$ – равнобедренный.  Ответ: $\vec{a} =$ _____.	7) ABC – треугольник.  Ответ: $\vec{a} =$ _____.	11) $ABCD$ – параллелограмм.  Ответ: $\vec{a} =$ _____.
4) $\triangle ABC$ – прямоугольный.  Ответ: $\vec{a} =$ _____.	8) ABC – треугольник.  Ответ: $\vec{a} =$ _____.	12) Окружность с центром O.  Ответ: $\vec{a} =$ _____.

Задание 6. ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ.

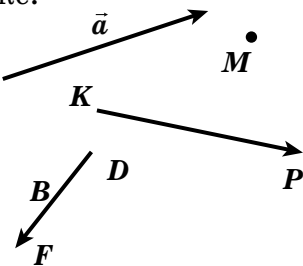
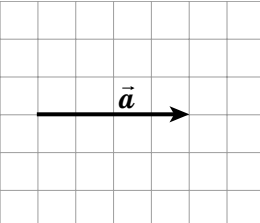
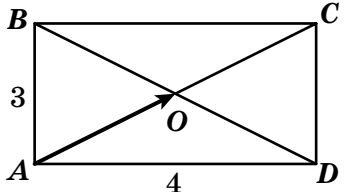
- Вставьте пропущенное слово/пропущенные слова.

1) Отрезок, для которого указано, какая из его граничных точек считается началом, а какая – концом, называется _____.
2) Любая точка плоскости – это _____ вектор.
3) Длиной ненулевого вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина _____.
4) Длина нулевого вектора равна _____.
5) На рисунках вектор обозначается отрезком со _____, показывающей направление вектора.

- Определите, верно ли утверждение.

	Да/нет
6) Если вектор $\overrightarrow{AB}$, то А – это начало вектора, а В – конец.	
7) У вектора $\vec{a}$ нет ни начала, ни конца.	
8) Длина вектора не может быть равна отрицательному числу.	
9) На рисунке, изображая вектор, стрелку ставят в начале вектора.	
10) Длина вектора $\overrightarrow{NN}$ равна нулю.	
11) $ \vec{0} = 0$.	

- Выполните задание.

12) Запишите названия векторов, изображённых на рисунке. 	13) Найдите длину вектора $\vec{a}$, зная, что размер клетки 3х3. 	14) $ABCD$ – прямоугольник. Найдите $\overrightarrow{AO}$. 
Ответ: _____.	Ответ: _____.	Ответ: _____.

КОЛЛИНЕАРНЫЕ ВЕКТОРЫ. РАВЕНСТВО ВЕКТОРОВ



Важно знать:

Ненулевые векторы называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

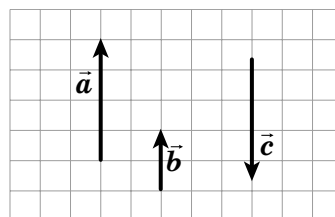
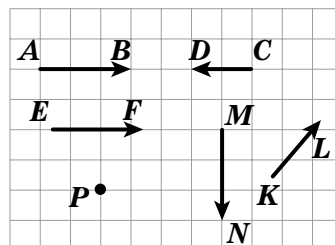
Векторы $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$, $\overline{PP}$ – коллинеарные, векторы $\overline{MN}$ и $\overline{KL}$ и $\overline{EF}$ – неколлинеарные.

Коллинеарные векторы могут быть **сонаправленными**, если они направлены одинаково, или **противоположно направленными**, если их направления противоположны.

$\vec{a} \uparrow \vec{b}$ – сонаправленные векторы,

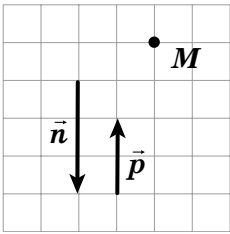
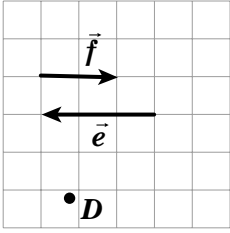
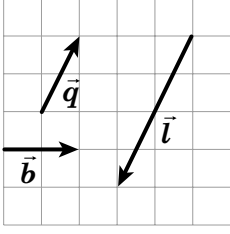
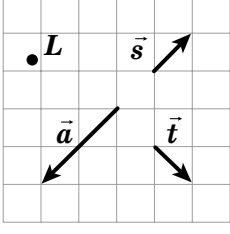
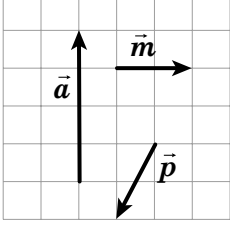
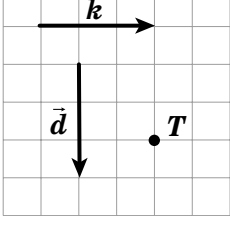
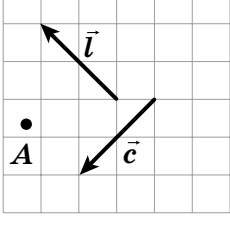
$\vec{a} \updownarrow \vec{c}$ – противоположно направленные векторы.

Нулевой вектор сонаправлен с любым вектором.



Задание 7. Заполните таблицу.

		Коллинеарные векторы	Сонаправленные векторы	Противоположно направленные векторы
1)		$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$	$\vec{a} \uparrow \vec{b}$	$\vec{a} \updownarrow \vec{c}$ $\vec{b} \updownarrow \vec{c}$
2)				
3)				
4)				

5)				
6)				
7)				
8)				
9)				
10)				
11)				

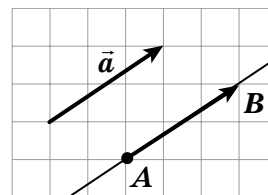
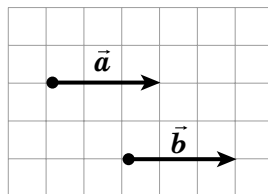


Важно знать:

Векторы называются **равными**, если они сонаправлены и их длины равны.

$$\begin{cases} \vec{a} \uparrow \vec{b}, \\ |\vec{a}| = |\vec{b}|. \end{cases} \Rightarrow \vec{a} = \vec{b}.$$

От любой точки плоскости можно отложить вектор, равный данному вектору $\vec{a}$, и притом только один.



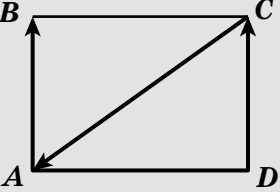
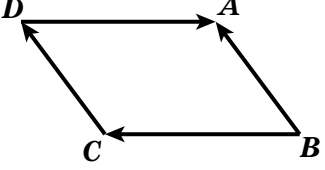
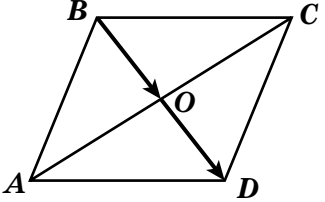
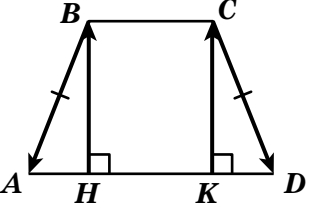
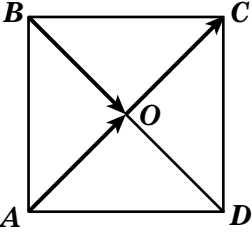
$$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$$

Задание 8. Определите, какие из векторов равны, и докажете это, заполнив таблицу.

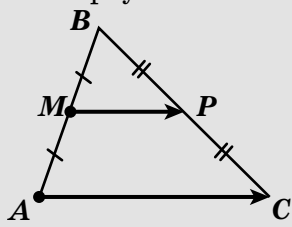
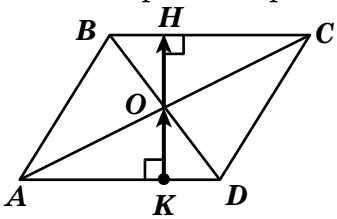
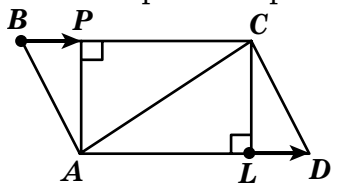
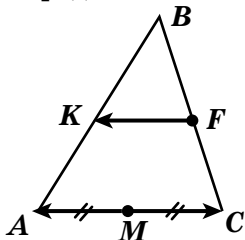
А.

		Сонаправленные векторы	Длины сонаправленных векторов	Равные векторы
1)		$\vec{a} \uparrow \vec{c}$ $\vec{a} \uparrow \vec{d}$ $\vec{c} \uparrow \vec{d}$	$ \vec{a} = 2, \vec{c} = 3$ $ \vec{a} = 2, \vec{d} = 2$ $ \vec{c} = 3, \vec{d} = 2$	$\vec{a} = \vec{d}$
2)				
3)				
4)				

Б.

		Сонаправленные векторы	Длины сонаправ- ленных векторов	Равные векторы
1)	$ABCD$ – прямоугольник 	$AB \uparrow\uparrow DC$	$ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} ,$ т.к. $AB = DC$ по свойству прямоу- гольника	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
2)	$ABCD$ – параллелограмм 			
3)	$ABCD$ – параллелограмм 			
4)	$ABCD$ – равнобедренная трапеция 			
5)	$ABCD$ – квадрат 			

В.

		Сонаправленные векторы	Длины сонаправленных векторов	Равные векторы
1)	ABC – треугольник 	$MP \uparrow\uparrow AC$ M – середина AB, P – середина BC, значит, MP – средняя линия $\triangle ABC$; тогда, $MP \parallel AC$ (по свой- ству средней линии треугольника)	$\overrightarrow{MP} \neq \overrightarrow{AC}$, т.к. $MP = \frac{1}{2} AC$ (по свойству средней линии треугольника)	равных векторов нет
2)	$ABCD$ – параллелограмм 			
3)	$ABCD$ – параллелограмм 			
4)	ABC – треугольник, KF – средняя линия 			

Задание 9. ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ.

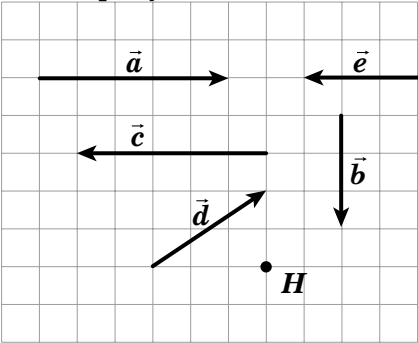
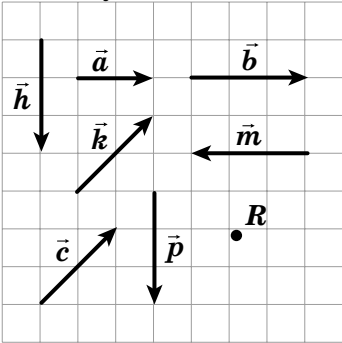
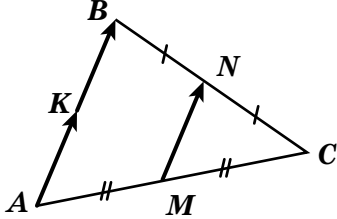
- Вставьте пропущенное слово/пропущенные слова.

1) Ненулевые векторы называются коллинеарными, если они лежат на _____ прямой или на _____ прямых.
2) Коллинеарные векторы называются _____, если они направлены одинаково.
3) Коллинеарные векторы называются противоположно направленными, если их направления _____.
4) Векторы называются равными, если они _____ и их длины _____.
5) От любой точки плоскости можно _____ вектор, равный данному вектору $\vec{a}$, и притом только _____.

- Определите, верно ли утверждение.

	Да/нет
6) Если векторы лежат на одной прямой, то они коллинеарные.	
7) Неколлинеарные векторы могут быть сонаправленными.	
8) Нулевой вектор коллинеарен любому вектору.	
9) Нулевой вектор сонаправлен с любым вектором.	
10) Если два вектора равны, то они сонаправлены.	
11) Векторы называются равными, если их длины равны.	

- Выполните задание.

12) Выпишите пары коллинеарных векторов, изображённых на рисунке.  Ответ: _____.	13) Определите, какие из данных векторов равны. Ответ обоснуйте.  Ответ: _____.	14) ABC – треугольник, K – середина AB. Пользуясь рисунком, докажите, что $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{KB} = \overrightarrow{MN}$.  Ответ: _____.
--	--	---

СУММА ВЕКТОРОВ. ВЫЧИТАНИЕ ВЕКТОРОВ

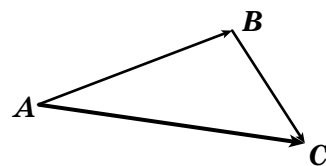


Важно знать:

Правило треугольника.

Если A, B и C произвольные точки, то $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Для любого вектора $\vec{a}$ справедливо равенство $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.



Задание 10. Постройте вектор $\vec{n}$, равный вектору суммы данных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

1)		3)		5)		7)	
2)		4)		6)		8)	

Задание 11. Постройте указанные векторы с помощью правила треугольника.

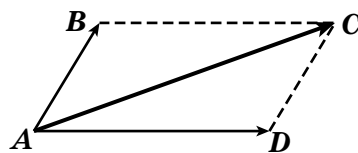
		$\vec{a} + \vec{b}$	$\vec{b} + \vec{c}$	$\vec{c} + \vec{a}$
1)				
2)				
3)				
4)				



Важно знать:

Правило параллелограмма.

Если A, B и D произвольные точки, то $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$,
где AC – диагональ параллелограмма $ABCD$.



Задание 12. Построить с помощью правила параллелограмма вектор $\vec{p}$, равный вектору суммы данных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

1)	3)	5)	7)
2)	4)	6)	8)

Задание 13. Постройте указанные векторы с помощью правила параллелограмма.

		$\vec{a} + \vec{b}$	$\vec{b} + \vec{c}$	$\vec{a} + \vec{c}$
1)				
2)				
3)				
4)				



Важно знать:

Законы сложения векторов.

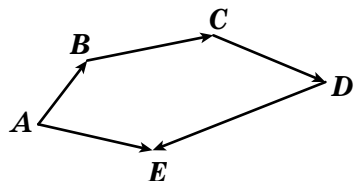
Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ справедливы равенства:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (переместительный закон).
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (сочетательный закон).

Правило многоугольника.

Если A, B, C, D и E произвольные точки, то

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}.$$



Задание 14. Постройте с помощью правила многоугольника вектор $\vec{q}$, равный вектору сумме данных векторов.

1)	3)	5)
2)	4)	6)

Задание 15. Постройте указанные векторы с помощью правила параллелограмма.

1)	$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{e}$ 	$\vec{c} + \vec{b} + \vec{d} + \vec{e}$
2)	$\vec{a} + (\vec{e} + \vec{c})$ 	$\vec{b} + \vec{a} + \vec{e} + \vec{c} + \vec{d}$



Важно знать:

Противоположные векторы – это векторы, которые имеют равные длины, но противоположные направления.

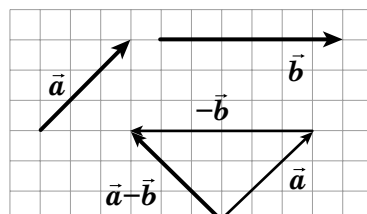
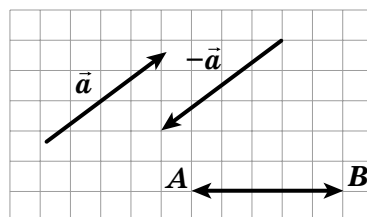
$\vec{a}$ и $-\vec{a}$
 $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$ | противоположные векторы.

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор, сумма которого с вектором $\vec{b}$, равна вектору $\vec{a}$.

Обозначение: $\vec{a} - \vec{b}$ – разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливо равенство

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$



Задание 16. Постройте указанные векторы.

		$\vec{a} - \vec{b}$	$\vec{b} - \vec{a}$
1)			
2)			
3)			
4)			

Задание 17. ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ.

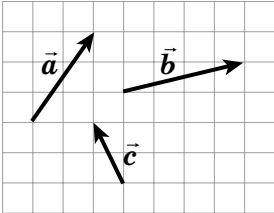
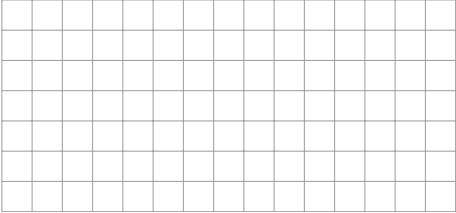
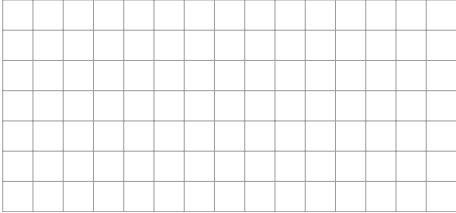
- Вставьте пропущенное слово/пропущенные слова/формулу.

1) Для произвольных точек A, B , и C верно равенство $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Это правило _____.
2) Для произвольных точек A, B и D верно равенство $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$, где AC – диагональ _____ $ABCD$. Это правило _____.
3) Противоположные векторы – это векторы, которые имеют _____ длины, но _____ направления.
4) Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор, сумма которого с вектором $\vec{b}$, равна вектору _____.
5) Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливо равенство $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} +$ _____.

- Определите, верно ли утверждение.

	Да/нет
6) Для произвольных точек A, B, C верно $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB}$.	
7) Для произвольных точек A, B, C верно $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$.	
8) Векторы $\vec{a}$ и $-\vec{a}$ – противоположные.	
9) Для произвольных точек A, B, C верно $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.	
10) Для любого вектора $\vec{n}$ справедливо равенство $\vec{n} + \vec{0} = \vec{0}$.	
11) Для любого вектора $\vec{p}$ справедливо равенство $\vec{p} + \vec{0} = \vec{p}$.	

- Выполните задание.

12) Для данных векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ постройте заданные векторы 	14) $\vec{c} + \vec{a}$ (с помощью правила параллелограмма) 
13) $\vec{a} + \vec{b}$ (с помощью правила треугольника) 	15) $\vec{b} - \vec{c}$ 

ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО

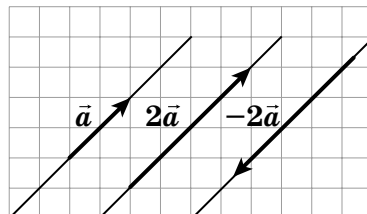


Важно знать:

Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число k называется такой вектор $\vec{b}$, длина которого равна $|k| \cdot |\vec{a}|$,

при $k \geq 0$ $\vec{a} \uparrow \vec{b}$,

при $k < 0$ $\vec{a} \updownarrow \vec{b}$.



Произведение вектора $\vec{a}$ на число k обозначается так: $k\vec{a}$.

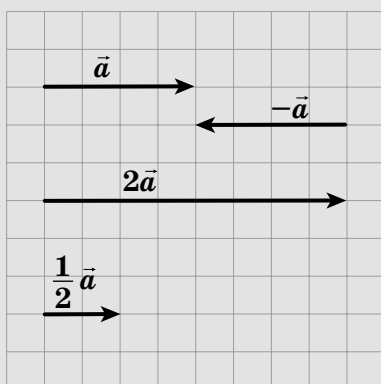
1) $\vec{0} \cdot k = \vec{0}$;

2) $\vec{a} \cdot 0 = \vec{0}$;

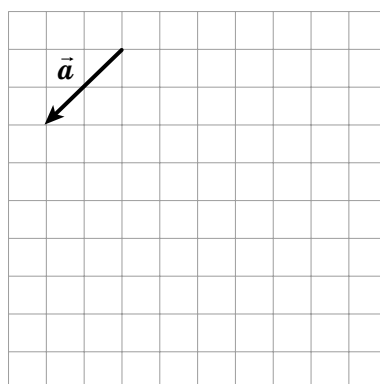
3) векторы $\vec{a}$ и $k\vec{a}$ коллинеарны.

Задание 18. Постройте указанные векторы.

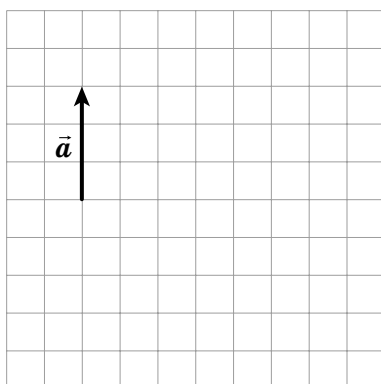
1)
 $-\vec{a}, 2\vec{a}, \frac{1}{2}\vec{a}$



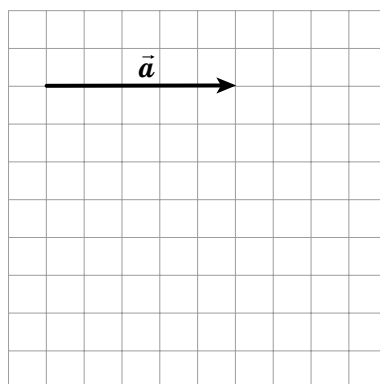
3)
 $3\vec{a}, \frac{1}{2}\vec{a}, -2\vec{a}$



2)
 $2\vec{a}, \frac{1}{3}\vec{a}, -\vec{a}$



4)
 $0, 2\vec{a}, -\frac{4}{5}\vec{a}, 2\vec{a}$





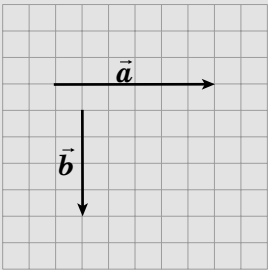
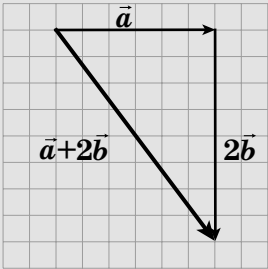
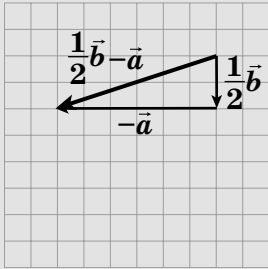
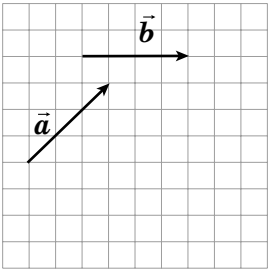
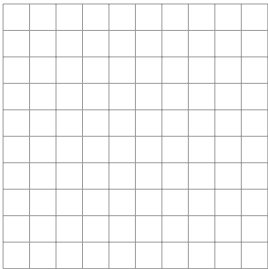
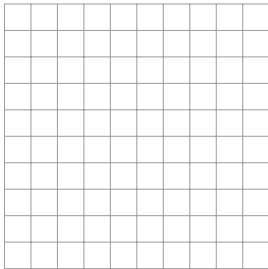
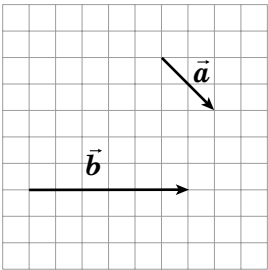
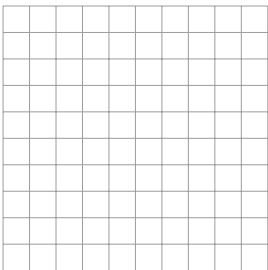
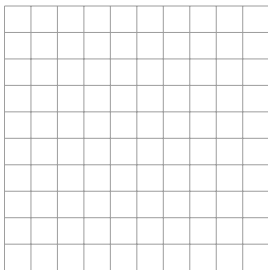
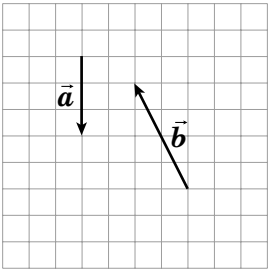
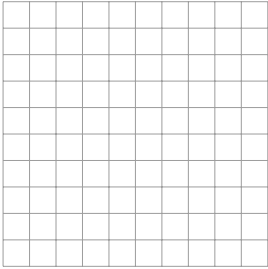
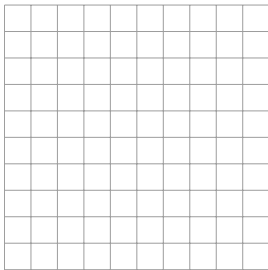
Важно знать:

Свойства умножения вектора на число

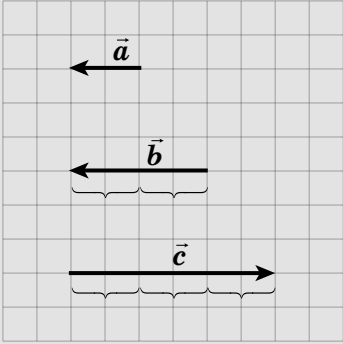
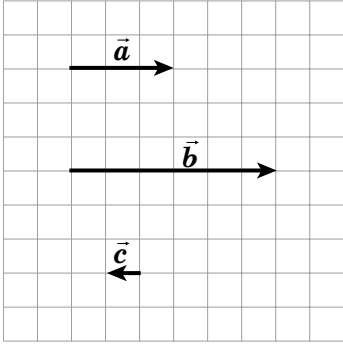
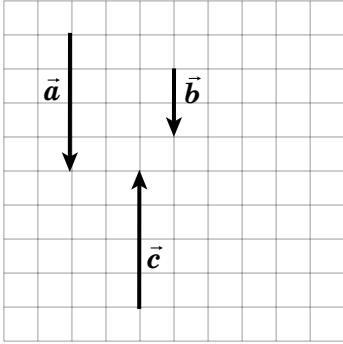
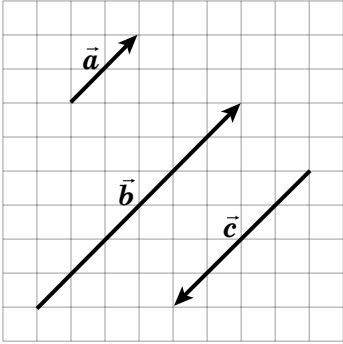
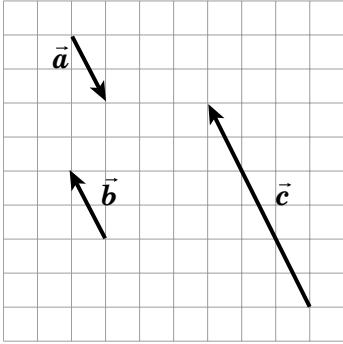
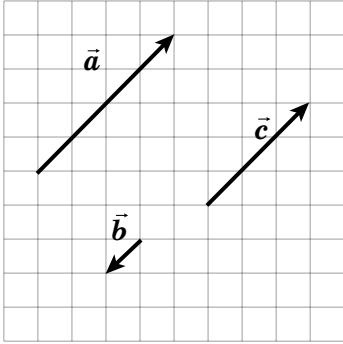
Для любых чисел k, l и любых векторов $\vec{a}, \vec{b}$ справедливы равенства:

1. $(kl)\vec{a} = k(l\vec{a})$ (сочетательный закон).
2. $(k+l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$ (первый распределительный закон).
3. $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ (второй распределительный закон).

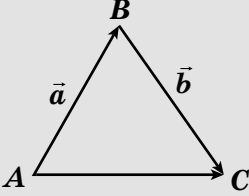
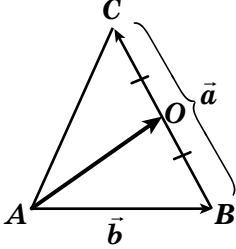
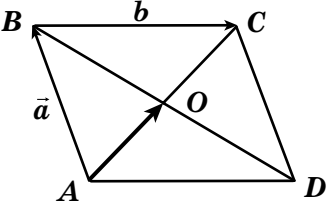
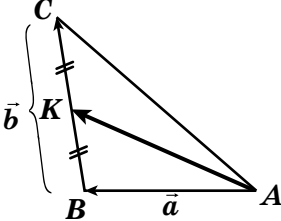
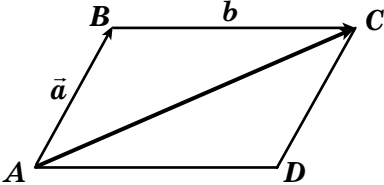
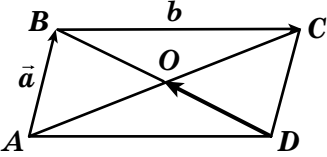
Задание 19. Постройте указанный вектор.

1)		$\vec{a} + 2\vec{b}$ 	$\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}$ 
2)		$2\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ 	$\frac{1}{3}\vec{a} - 2\vec{b}$ 
3)		$\frac{1}{3}\vec{b} + 2\vec{a}$ 	$\frac{1}{2}\vec{b} - 2\vec{a}$ 
4)		$2\vec{a} + 2\vec{b}$ 	$\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$ 

Задание 20. Выразите данные векторы через вектор $\vec{a}$.

1)  $\vec{b} = 2\vec{a}$, $\vec{c} = -3\vec{a}$.	3)  $\vec{b} = \underline{\hspace{2cm}}$, $\vec{c} = \underline{\hspace{2cm}}$.	5)  $\vec{b} = \underline{\hspace{2cm}}$, $\vec{c} = \underline{\hspace{2cm}}$.
2)  $\vec{b} = \underline{\hspace{2cm}}$, $\vec{c} = \underline{\hspace{2cm}}$.	4)  $\vec{b} = \underline{\hspace{2cm}}$, $\vec{c} = \underline{\hspace{2cm}}$.	6)  $\vec{b} = \underline{\hspace{2cm}}$, $\vec{c} = \underline{\hspace{2cm}}$.

Задание 21. Зная, что $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, выразите указанный вектор через вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

1) ABC – треугольник  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$. $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$.	3) ABC – треугольник  $\overrightarrow{AO} = \underline{\hspace{2cm}}$.	5) $ABCD$ – параллелограмм  $\overrightarrow{AO} = \underline{\hspace{2cm}}$.
2) ABC – треугольник  $\overrightarrow{KA} = \underline{\hspace{2cm}}$.	4) $ABCD$ – параллелограмм  $\overrightarrow{AC} = \underline{\hspace{2cm}}$.	6) $ABCD$ – параллелограмм  $\overrightarrow{DO} = \underline{\hspace{2cm}}$.



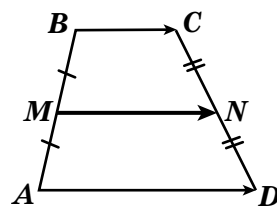
Важно знать:

Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины её боковых сторон.

Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

MN – средняя линия трапеции $ABCD$, значит,

$$MN \parallel AD, MN \parallel BC, MN = \frac{AD + BC}{2}.$$

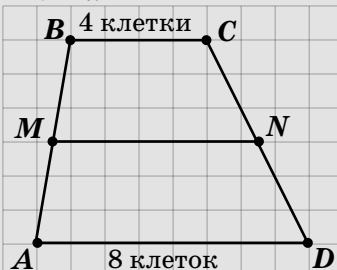


$$\overrightarrow{MN} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}}{2}$$

Задание 22. Найдите x .

A.

1) MN – средняя линия,
 $MN = x$

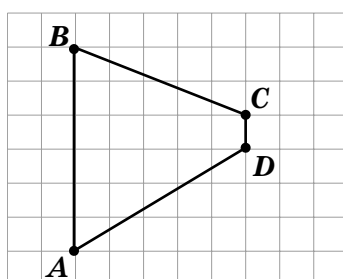


$AD = 8, BC = 4$, значит,

$$MN = \frac{8 + 4}{2} = 6.$$

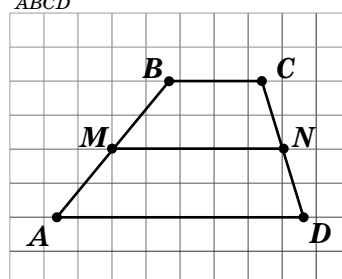
Ответ: $x = 6$.

4) MN – средняя линия,
 $MN = x$



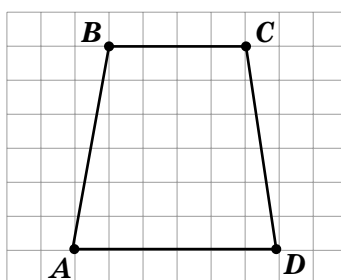
Ответ: $x =$ _____.

7) MN – средняя линия,
 $S_{ABCD} = x$



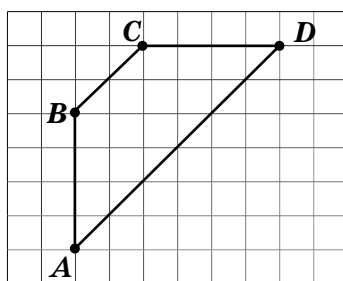
Ответ: $x =$ _____.

2) MN – средняя линия,
 $MN = x$



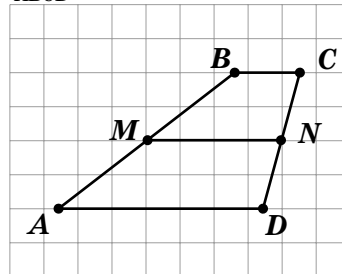
Ответ: $x =$ _____.

5) MN – средняя линия,
 $MN = x$



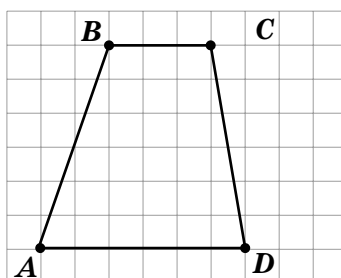
Ответ: $x =$ _____.

8) MN – средняя линия,
 $S_{ABCD} = x$



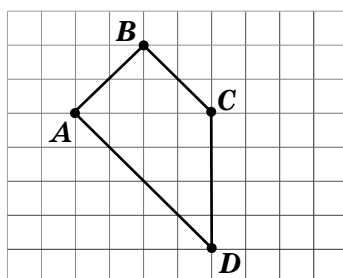
Ответ: $x =$ _____.

3) MN – средняя линия,
 $MN = x$



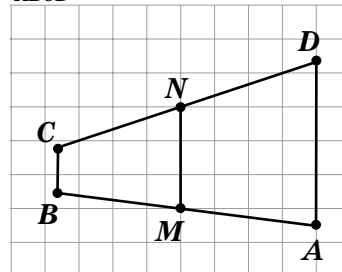
Ответ: $x =$ _____.

6) MN – средняя линия,
 $MN = x$



Ответ: $x =$ _____.

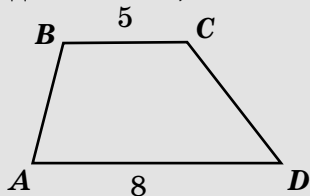
9) MN – средняя линия,
 $S_{ABCD} = x$



Ответ: $x =$ _____.

Б.

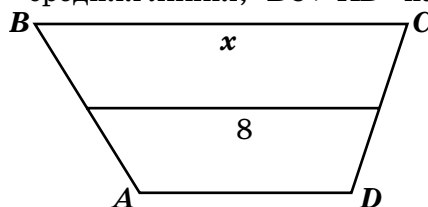
1) MN – средняя линия, $MN = x$



$$x = MN = \frac{AD + BC}{2} = \frac{8 + 5}{2} = 6,5.$$

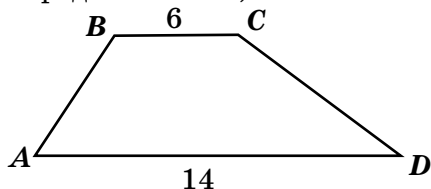
Ответ: $x = 6,5$.

5) MN – средняя линия, $BC > AD$ на 4.



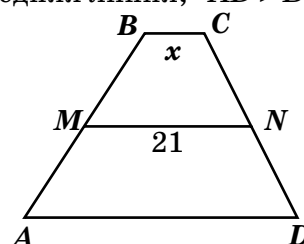
Ответ: $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

2) MN – средняя линия, $MN = x$



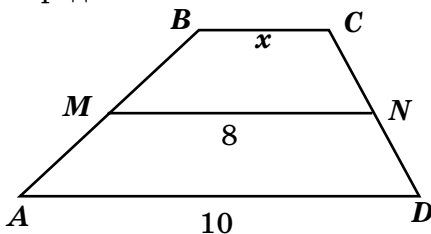
Ответ: $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

6) MN – средняя линия, $AD > BC$ на 20.



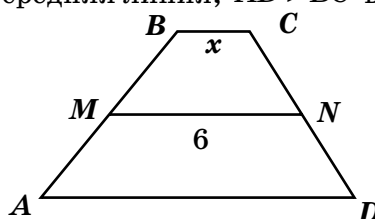
Ответ: $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

3) MN – средняя линия



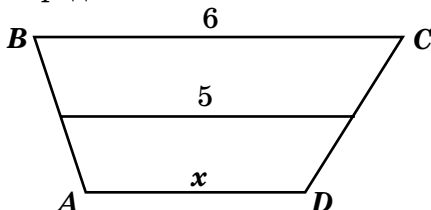
Ответ: $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

7) MN – средняя линия, $AD > BC$ в 3 раза.



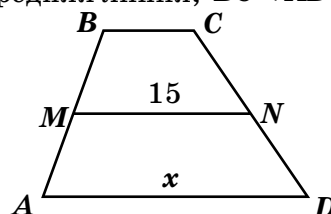
Ответ: $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

4) MN – средняя линия



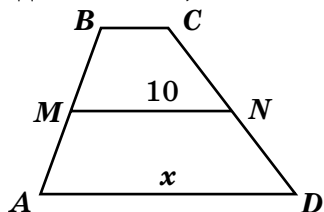
Ответ: $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

8) MN – средняя линия, $BC < AD$ в 2 раза.



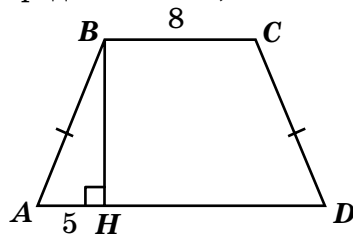
Ответ: $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

9) MN – средняя линия, $AD : BC = 3 : 1$.



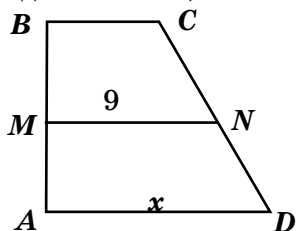
Ответ: $x =$ _____.

13) MN – средняя линия, $MN = x$



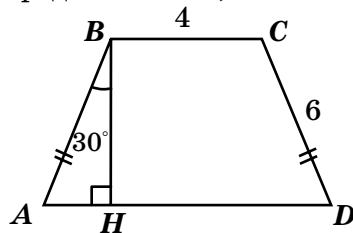
Ответ: $x =$ _____.

10) MN – средняя линия, $AD : BC = 2 : 1$.



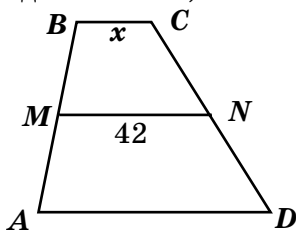
Ответ: $x =$ _____.

14) MN – средняя линия, $MN = x$



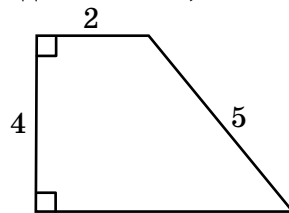
Ответ: $x =$ _____.

11) MN – средняя линия, $BC : AD = 2 : 5$.



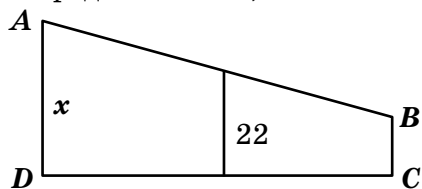
Ответ: $x =$ _____.

15) MN – средняя линия, $MN = x$



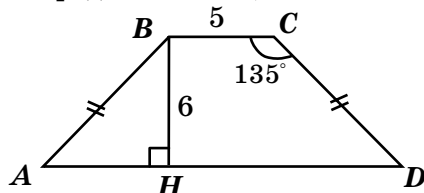
Ответ: $x =$ _____.

12) MN – средняя линия, $BC : AD = 3 : 8$



Ответ: $x =$ _____.

16) MN – средняя линия, $MN = x$



Ответ: $x =$ _____.

Задание 23. ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ.

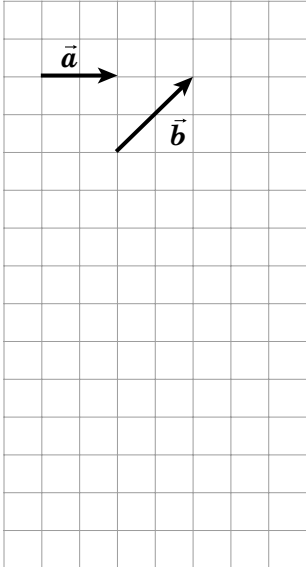
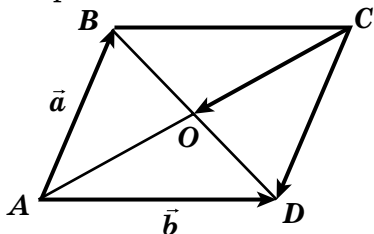
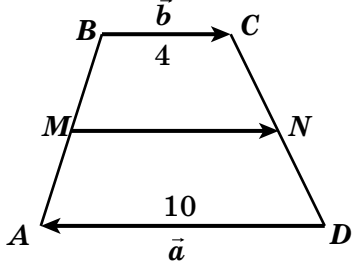
- Вставьте пропущенное слово/пропущенные слова.

1) Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число k называется такой вектор $\vec{b}$, длина которого равна _____.
2) $\vec{0} \cdot k =$ _____.
3) $\vec{a} \cdot 0 =$ _____.
4) Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий _____.
5) Средняя линия трапеции параллельна _____ и равна их _____.

- Определите, верно ли утверждение.

	Да/нет
6) Произведение вектора $\vec{a}$ на число k обозначается так: $\vec{ka}$.	
7) Векторы $\vec{a}$ и $k\vec{a}$ коллинеарны.	
8) При $k < 0$ векторы $\vec{a}$ и $k\vec{a}$ противоположно направленные.	
9) При $k = 0$ $\vec{a} \uparrow \uparrow k\vec{a}$, где $\vec{a}$ – ненулевой вектор.	
10) Средняя линия трапеции параллельна основанию и равна его половине.	
11) Средняя линия трапеции – отрезок, соединяющий середины её сторон.	

- Выполните задание.

12) Постройте векторы: а) $2\vec{a}$; б) $-\frac{1}{2}\vec{b}$; в) $2\vec{b} - 2\vec{a}$. 	13) Зная, что $ABCD$ – параллелограмм, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, выразите через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вектор $\overrightarrow{CO}$.  Ответ: _____.	14) MN – средняя линия трапеции $ABCD$ а) $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Выразите через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вектор $\overrightarrow{MN}$. б) найдите длину MN, если $AD = 10$, $BC = 4$.  Ответ _____.
---	---	---

МЕТОД КООРДИНАТ

КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА



Важно знать:

Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и $\vec{a} \neq \vec{0}$, то существует такое число k , что $\vec{b} = k\vec{a}$.

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ два данных вектора. Если вектор $\vec{p}$ представлен в виде $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$, где x и y – некоторые числа, то говорят, что вектор $\vec{p}$ разложен по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Числа x и y называются коэффициентами разложения.

Два данных неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют векторным базисом, а представление вектора $\vec{p}$ в виде $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$ – разложением вектора $\vec{p}$ по базисным векторам.

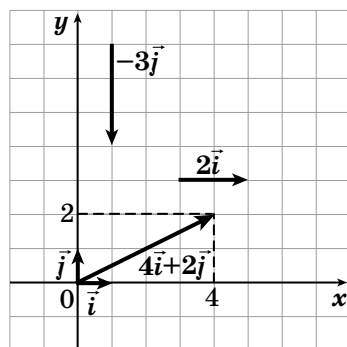
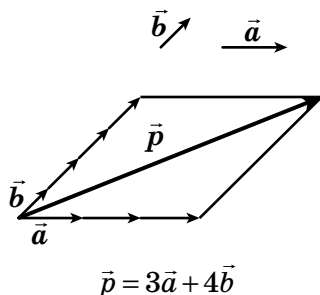
Векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ назовем координатными векторами.

Если $\vec{p} = x\vec{i} + y\vec{j}$, то коэффициенты x и y называются координатами вектора $\vec{p}$ в данной системе координат.

Координаты вектора записывают в фигурных скобках после обозначения вектора: $\vec{p} \{x; y\}$.

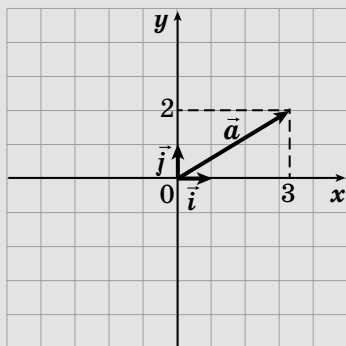
Координаты равных векторов соответственно равны.

Если $\vec{a} = \vec{b}$, $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ и $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$, т.е. $\vec{a} \{x_1; y_1\}$ и $\vec{b} \{x_2; y_2\}$, то $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

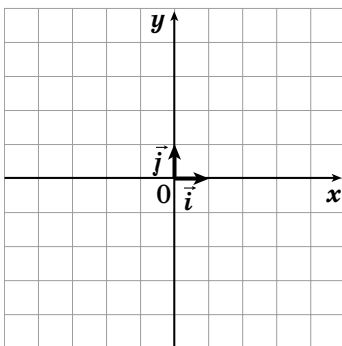


Задание 24. В прямоугольной системе координат постройте заданный вектор с началом в точке O .

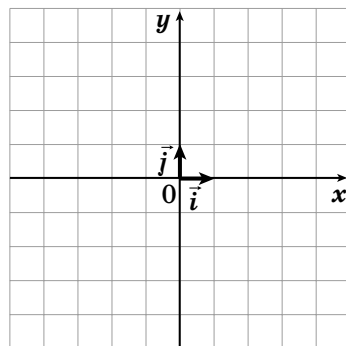
1) $\vec{a} \{3; 2\}$



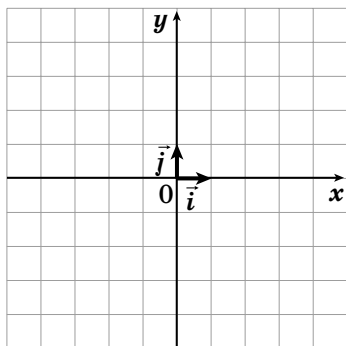
3) $\vec{n} \{2; -3\}$



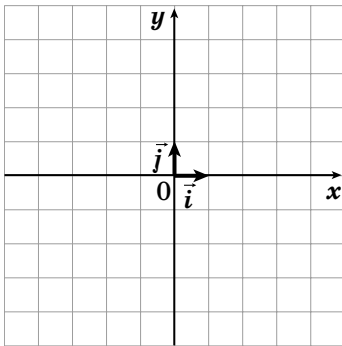
5) $\{0; 4\}$



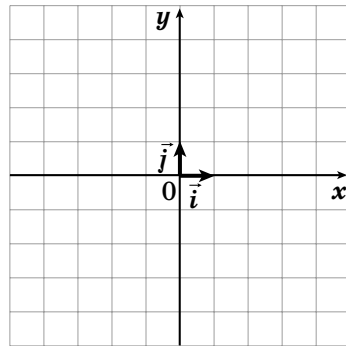
2) $\vec{b} \{3; 3\}$



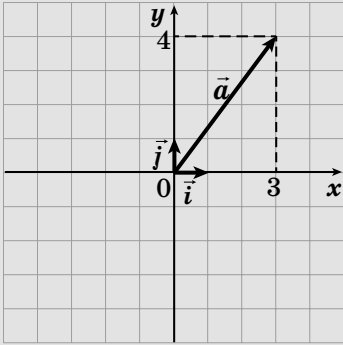
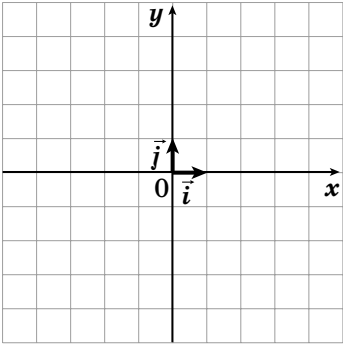
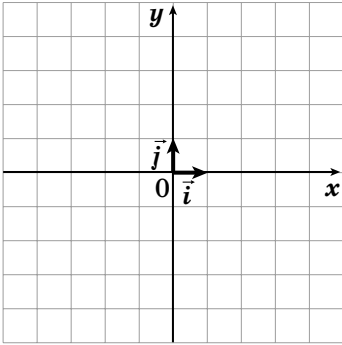
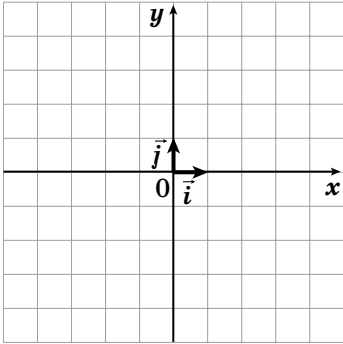
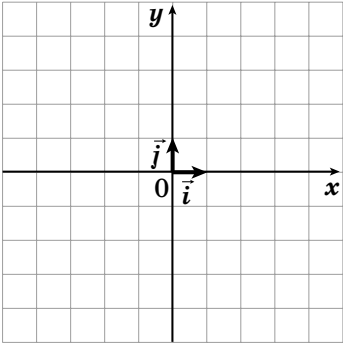
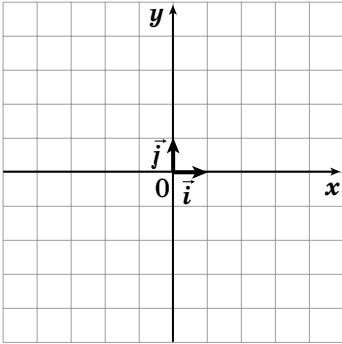
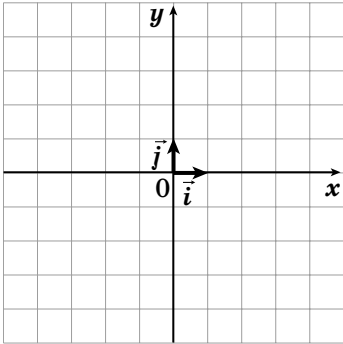
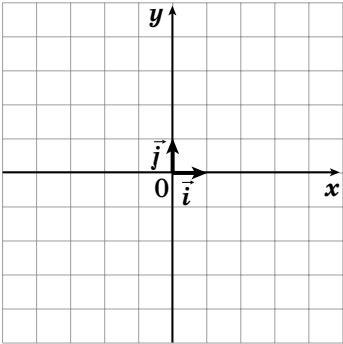
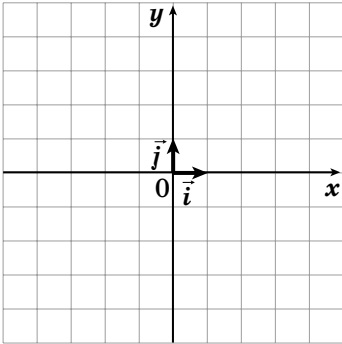
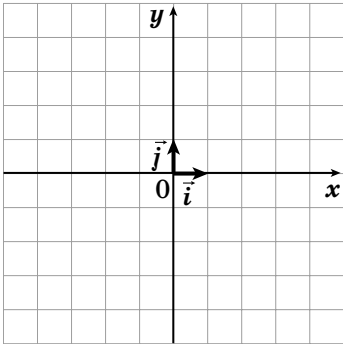
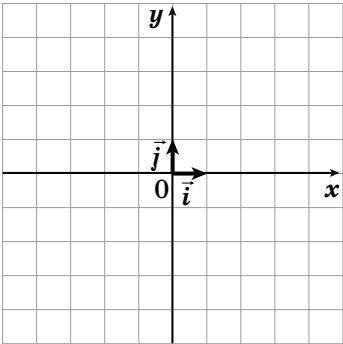
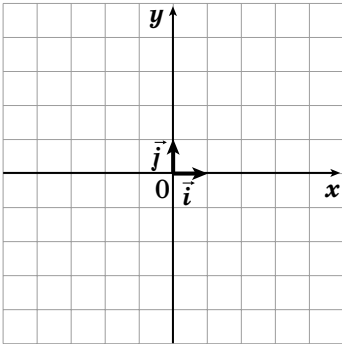
4) $\vec{m} \{-4; -2\}$



6) $\vec{p} \{-3; 0\}$



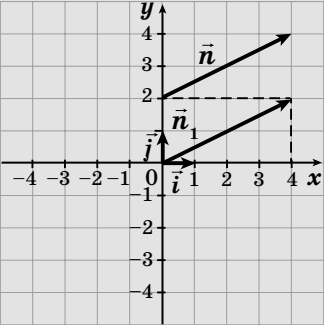
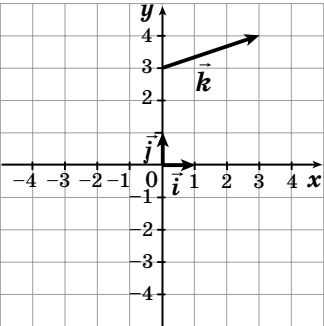
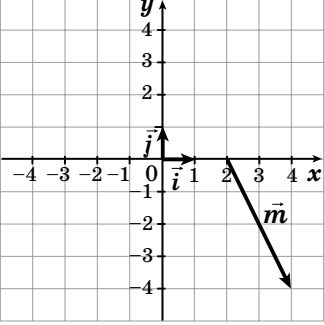
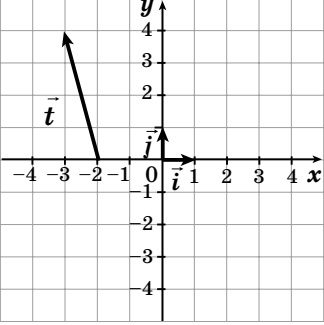
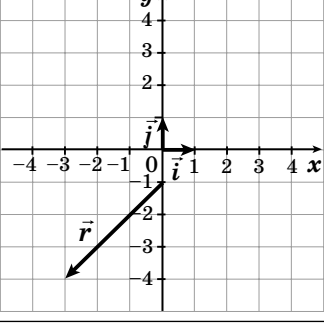
Задание 25. Определите координаты заданного вектора и постройте его в прямоугольной системе координат Oxy .

1) $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$, значит, $\vec{a} \{3;4\}$. 	5) $\vec{k} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$ 	9) $\vec{b} = -\vec{j}$ 
2) $\vec{c} = \vec{i} - 2\vec{j}$ 	6) $\vec{n} = 2\vec{i}$ 	10) $\vec{q} = \vec{i} - \vec{j}$ 
3) $\vec{t} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$ 	7) $\vec{p} = -\vec{i} + 3\vec{j}$ 	11) $\vec{m} = -3\vec{i}$ 
4) $\vec{f} = 4\vec{i} - 2\vec{j}$ 	8) $\vec{l} = -3\vec{i} - 4\vec{j}$ 	12) $\vec{s} = 3\vec{j}$ 

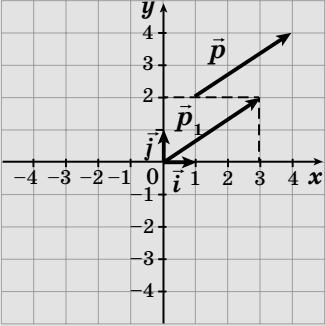
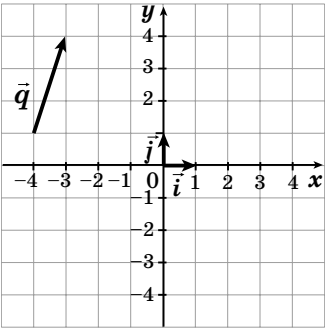
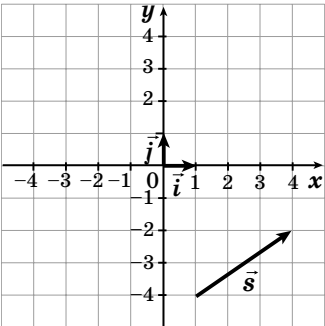
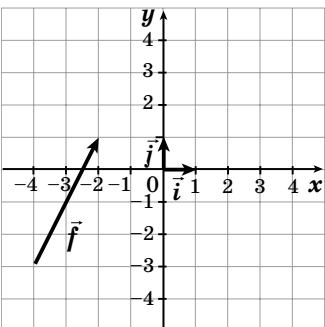
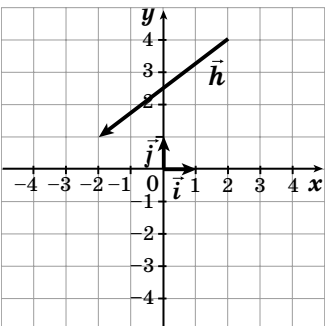
Задание 26. Заполните таблицу.
А.

		Разложение вектора по векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$	Координаты вектора
1)		$\vec{a} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$	$\vec{a}\{4;3\}$
2)			
3)			
4)			
5)			

Б.

		Разложение вектора по векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$	Координаты вектора
1)	 Построим вектор $\vec{n_1} = \vec{n}$ с началом в точке O.	$\vec{n_1} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$, значит, $\vec{n} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$	$\vec{n}\{4;2\}$
2)			
3)			
4)			
5)			

В.

		Разложение вектора по векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$	Координаты вектора
1)	 Построим вектор $\vec{p}_1 = \vec{p}$ с началом в точке O.	$\vec{p}_1 = 3\vec{i} + 2\vec{j}$, значит, $\vec{p} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$	$\vec{p}\{3;2\}$
2)			
3)			
4)			
5)			



Важно знать:

1. Каждая координата суммы двух или более векторов равна сумме соответствующих координат этих векторов.

Если $\vec{a} \{x_1; y_1\}$ и $\vec{b} \{x_2; y_2\}$, то $\vec{a} + \vec{b} \{x_1 + x_2; y_1 + y_2\}$.

2. Каждая координата разности двух векторов равна разности соответствующих координат этих векторов.

Если $\vec{a} \{x_1; y_1\}$ и $\vec{b} \{x_2; y_2\}$, то $\vec{a} - \vec{b} \{x_1 - x_2; y_1 - y_2\}$.

3. Каждая координата произведения вектора на число равна произведению соответствующей координаты вектора на это число.

Если $\vec{a} \{x_1; y_1\}$, то $k\vec{a} \{kx; ky\}$.

Задание 27. Заполните таблицу.

А.

	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{a} + \vec{b}$	$\vec{a} - \vec{b}$	$\vec{b} - \vec{a}$
1)	$\{1; 2\}$	$\{0; 6\}$	$\{1+0; 2+6\},$ $\{1; 8\}.$	$\{1-0; 2-6\},$ $\{1; -4\}.$	$\{0-1; 6-2\},$ $\{-1; 4\}.$
2)	$\{5; 3\}$	$\{2; 1\}$			
3)	$\{4; 0\}$	$\{7; -2\}$			
4)	$\{-3; 2\}$	$\{10; 1\}$			
5)	$\{-4; -6\}$	$\{-5; -2\}$			

Б.

	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$2\vec{a}$	$\frac{1}{2}\vec{b}$	$2\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$
1)	$\{4; 5\}$	$\{2; -2\}$	$\{4 \cdot 2; 5 \cdot 2\},$ $\{8; 10\}.$	$\left\{2 \cdot \frac{1}{2}; -2 \cdot \frac{1}{2}\right\},$ $\{1; -1\}.$	$\{8-1; 10-(-1)\},$ $\{7; 11\}.$
2)	$\{-7; 0\}$	$\{10; 4\}$			
3)	$\{3; -1\}$	$\{-6; 0\}$			
4)	$\{-11; -5\}$	$\{-20; -10\}$			
5)	$\{0; 9\}$	$\{-3; 18\}$			

Задание 28. ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ.

- Вставьте пропущенное слово/формулу.

1) Если вектор $\vec{p}$ представлен в виде $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$, где x и y – некоторые числа, то говорят, что вектор _____ по векторам _____ и $\vec{b}$.

2) Векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ назовём _____ векторами.

3) Если $\vec{p} = x\vec{i} + y\vec{j}$, то коэффициенты x и y называются _____ вектора $\vec{p}$ в данной системе координат. Записывают $\vec{p}$ _____.

4) Если $\vec{a} \{x_1; y_1\}$ и $\vec{b} \{x_2; y_2\}$, то $(\vec{a} + \vec{b}) \{ \underline{\hspace{2cm}}; \underline{\hspace{2cm}} \}$.

5) Если $\vec{a} \{x_1; y_1\}$ и $\vec{b} \{x_2; y_2\}$, то $(\vec{a} - \vec{b}) \{ \underline{\hspace{2cm}}; \underline{\hspace{2cm}} \}$.

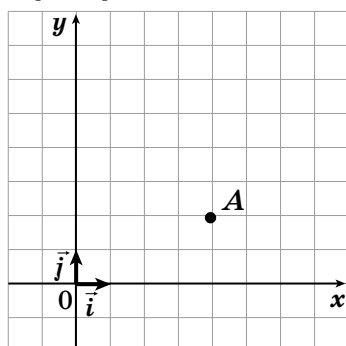
6) Если $\vec{a} \{x; y\}$, то $k\vec{a} \{ \quad ; \quad \}$.

- Определите, верно ли утверждение.

	Да/нет
7) Если $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$, то $\vec{a}\{3;4\}$.	
8) $\vec{a}\{2;5\}$, $\vec{b}\{x;y\}$. Если $\vec{a} = \vec{b}$, то $x = 2$, $y = 5$.	
9) Если $\vec{a}\{-3;0\}$, $\vec{b}\{3;0\}$, то координаты вектора $\vec{a} + \vec{b}$ равны $\{0; 0\}$.	
10) Если $\vec{a}\{1;-3\}$, $\vec{b}\{-1;3\}$, то координаты вектора $\vec{a} - \vec{b}$ равны $\{0; 0\}$.	
11) Если $\vec{a}\{-5;1\}$, то координаты вектора $-3\vec{a}$ равны $\{-8; -2\}$.	

- Выполните задание.

12) В прямоугольной системе координат Oxy постройте вектор $\vec{a} \{-1; 4\}$ с началом в точке A .



13) $\vec{a} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$, $\vec{b} = -3\vec{j}$.
Найдите координаты вектора $\vec{n} = 2\vec{b} - \vec{a}$.

$$14) \vec{a}\{8;-4\}, \vec{b}\{6;0\},$$

$$\vec{c}\{2;-6\}$$

Найдите координаты вектора $\vec{p} = \frac{1}{2}\vec{a} - 2\vec{b} - \vec{c}$.

Ответ: . Ответ: .

ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ В КООРДИНАТАХ



Важно знать:

Связь между координатами вектора и координатами его начала и конца

Пусть точка O – начало координат, точка M – произвольная точка координатной плоскости.

Вектор $\overrightarrow{OM}$ назовём **радиус-вектором** точки M .

Если $M(x; y)$, то $\overrightarrow{OM} \{x; y\}$.



Каждая координата вектора равна разности соответствующих координат его конца и начала.

Если $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, то $\overrightarrow{AB} \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$.

Простейшие задачи в координатах

1) Координаты середины отрезка.

Если точка $M(m_1; m_2)$ – середина отрезка AB , то $m_1 = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $m_2 = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

2) Вычисление длины вектора по его координатам.

Если $\vec{a} \{x; y\}$, то $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

3) Расстояние между двумя точками.

Если $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, то $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, где d – расстояние между точками A и B .

Задание 29. Заполните таблицу.

	A	B	Координаты $\overrightarrow{AB}$	$ \overrightarrow{AB} $	Координаты $M(x; y)$ – середины отрезка AB
1)	(2; 10)	(2; 6)	$\{2 - 2; 6 - 10\}$ $\overrightarrow{AB} \{0; -4\}$	$\sqrt{0^2 + (-4)^2} = \sqrt{16} = 4$ $ \overrightarrow{AB} = 4$	$x = \frac{2+2}{2} = 2$ $y = \frac{10+6}{2} = 8$ $M(2; 8)$
2)	(-4; 5)	(-1; 1)			
3)	(3; 9)	(8; -3)			
4)	(0; 7)	(-6; -1)			
5)	(9; 1)	(8; 0)			

а) равнобедренный; б) не равнобедренный.

38

Задание 31. Зная координаты вершин треугольника ABC , найдите длину медианы AM .

	A	B	C	Решение
1)	$(1; 2)$	$(7; 1)$	$(5; 5)$	1) AM – медиана, значит, M – середина BC. Пусть $M(x; y)$. $B(7; 1) \mid C(5; 5) \mid x = \frac{7+5}{2} = 6; y = \frac{1+5}{2} = 3; M(6; 3)$. 2) $A(1; 2) \mid M(6; 3) \mid AM = \sqrt{(6-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$. Ответ: $AM = \sqrt{26}$.
2)	$(-2; 10)$	$(1; 6)$	$(-3; 2)$	Ответ: $AM =$ _____.
3)	$(1; 8)$	$(-4; 7)$	$(0; 1)$	Ответ: $AM =$ _____.
4)	$(1; 1)$	$(5; -3)$	$(5; -1)$	Ответ: $AM =$ _____.
5)	$(-6; 2)$	$(-2; -2)$	$(0; 8)$	Ответ: $AM =$ _____.

Задание 32. Зная координаты вершин A , B и C параллелограмма $ABCD$, найдите координаты вершины $D(x; y)$.

	A	B	C	Решение
1)	$(1; 1)$	$(6; 3)$	$(5; 9)$	Пусть $AC \cap BD = O$, тогда O – середина AC и BD (по свойству параллелограмма). Пусть $O(x_0; y_0)$. 1) $\begin{matrix} A(1; 1) \\ C(5; 9) \end{matrix} \left \begin{matrix} x_0 = \frac{1+5}{2} = 3; y_0 = \frac{1+9}{2} = 5; O(3; 5). \end{matrix} \right.$ 2) $\begin{matrix} B(6; 3) \\ D(x; y) \end{matrix} \left \begin{matrix} 3 = \frac{6+x}{2}, 5 = \frac{3+y}{2}, \\ 6+x = 6, 3+y = 10, \\ x = 0, y = 7; D(0; 7). \end{matrix} \right.$ Ответ: $(0; 7)$.
2)	$(1; 2)$	$(3; 8)$	$(7; 6)$	Ответ: _____.
3)	$(7; -1)$	$(2; 1)$	$(7; 7)$	Ответ: _____.
4)	$(-8; 1)$	$(-10; -2)$	$(-2; -3)$	Ответ: _____.
5)	$(0; 5)$	$(-1; 0)$	$(-4; 3)$	Ответ: _____.

Задание 33. ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ.

- Вставьте пропущенное слово.

1) Каждая координата вектора равна _____ соответствующих координат его конца и начала.
2) Каждая координата середины отрезка равна _____ соответствующих координат его концов.
3) По формуле $ \vec{a} = \sqrt{x^2 + y^2}$ вычисляется _____ вектора $\vec{a} \{x; y\}$.
4) По формуле $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ вычисляется _____ между точками $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$.
5) _____ – это вектор, проведенный из начала координат в данную точку.

- Определите, верно ли утверждение.

	Да/нет
6) Координаты радиус-вектора точки M совпадают с координатами этой точки.	
7) Если $A(2;6), (3;8)$, то $\overline{AB}\{1;2\}$.	
8) Если $\vec{n}\{4;3\}$, то $ \vec{n} = 7$.	
9) Если $A(2;1), B(-2;0)$, то $ \overline{AB} = 1$.	
10) Если $A(2;3), B(2;1)$, то координаты середины отрезка $(0;-2)$.	

- Выполните задание.

11) Найдите координаты вектора $\overline{KM}$, если $K(-4;9), M(-3;2)$. Ответ: _____.	13) Точка F – середина отрезка CD . Найдите координаты точки F , если $C(3;-10), D(2;4)$. Ответ: _____.	15) Определите, является ли треугольник ABC равнобедренным. В случае положительного ответа, укажите равные стороны, если $A(6;3), B(-4;7), C(1;-8)$
12) Найдите координаты точки P , если $Q(3;7), \overline{QP}\{1;-1\}$. Ответ: _____.	14) $ \vec{a} = \vec{b} $. Найдите ординату вектора $\vec{b}$, если $\vec{a}\{7;-6\}, \vec{b}\{2;y\}$. Ответ: _____.	Ответ: _____.

УРАВНЕНИЯ ОКРУЖНОСТИ И ПРЯМОЙ



Важно знать:

В прямоугольной системе координат уравнение окружности радиуса r с центром в точке $C(x_0; y_0)$ имеет вид $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$.

В частности, $x^2 + y^2 = r^2$ – уравнение окружности радиуса r с центром в начале координат.

Задание 34. Заполните таблицу.

	Уравнение окружности	Абсцисса центра окружности	Ордината центра окружности	Радиус окружности
1)	$(x-2)^2 + (y-5)^2 = 3^2$	2	5	3
2)	$(x-4)^2 + (y-7)^2 = 49$			
3)	$(x+2)^2 + (y+1)^2 = 4$			
4)	$(x-6)^2 + y^2 = 2$			
5)		3	2	1
6)		7	-4	3
7)		0	5	$\sqrt{7}$
8)		0	0	$\sqrt{3}$
9)	$x^2 + y^2 = 25$			
10)		$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	6

Задание 35. Определите, проходит ли окружность через точку A .

	Уравнение окружности	A	Решение
1)	$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 25$	(4; 3)	Подставим координаты точки A в уравнение окружности: $(4-1)^2 + (3+1)^2 = 25$, $3^2 + 4^2 = 25$ – верное равенство, значит, окружность проходит через точку A . Ответ: да.
2)	$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 16$	(3; 2)	Ответ:_____.
3)	$x^2 + (y-4)^2 = 9$	(2; 5)	Ответ:_____.
4)	$(x+1)^2 + y^2 = 100$	(5; 8)	Ответ:_____.
5)	$(x-1)^2 + (y-7)^2 = 29$	(1; -2)	Ответ:_____.



Важно знать:

Уравнение прямой в прямоугольной системе координат имеет вид: $ax + by + c = 0$,
где x и y – координаты точки, принадлежащей прямой.

Если $a = 0$, то прямая параллельна оси абсцисс (Ox);

если $b = 0$, то прямая параллельна оси ординат (Oy);

если $c = 0$, то прямая проходит через начало координат.

Если $b \neq 0$, то уравнение прямой можно записать в виде $y = kx + d$.

Число k называется **угловым коэффициентом** прямой.

Пусть l_1 и l_2 две прямые:

$l_1: y = k_1x + d_1$,

$l_2: y = k_2x + d_2$.

Если $k_1 \neq k_2$, то прямые l_1 и l_2 – пересекаются.

Если $k_1 = k_2$ и $d_1 \neq d_2$, то прямые l_1 и l_2 параллельны.

Задание 36. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки A и B .

	A	B	Решение
1)	$(1; -2)$	$(-3; 1)$	Прямая AB имеет уравнение вида $ax + by + c = 0$. (1) 1) Подставим координаты точек A и B в уравнение (1). $\begin{cases} a \cdot 1 + b \cdot (-2) + c = 0, \\ a \cdot (-3) + b \cdot 1 + c = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a - 2b + c = 0, \\ -3a + b + c = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a = 2b - c, \\ -3(2b - c) + b + c = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} a = 2b - c, \\ -5b + 4c = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a = 2b - c, \\ b = \frac{4}{5}c; \end{cases} \quad \begin{cases} a = 2 \cdot \frac{4}{5}c - c, \\ b = \frac{4}{5}c; \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{3}{5}c, \\ b = \frac{4}{5}c. \end{cases}$ 2) Подставим полученные выражения в уравнение (1). $\frac{3}{5}c \cdot x + \frac{4}{5}c \cdot y + c = 0 \quad : c \text{ при } c \neq 0,$ $\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 1 = 0 \quad \cdot 5, \quad 3x + 4y + 5 = 0 \text{ – искомое уравнение прямой } AB.$ Ответ: $3x + 4y + 5 = 0$.
2)	$(3; 7)$	$(0; 1)$	Ответ: _____.

3)	$(-2; 0)$	$(4; 6)$	Ответ: _____.
4)	$(1; -1)$	$(-2; 3)$	Ответ: _____.
5)	$(1; 1)$	$(-2; -1)$	Ответ: _____.

Задание 37. Составьте уравнение прямой n , если известно, что:

1)	прямая n параллельна прямой m , $m: y = 3x + 5$, прямая n проходит через точку $(1; 2)$.	Запишем уравнение прямой n в виде $y = kx + b$. 1) $n \parallel m$, значит, у этих прямых один и тот же угловой коэффициент, т.к. $m: y = 3x + 5$, то $k = 3$. 2) Найдём коэффициент b , для этого подставим координаты точки $(1; 2)$ в уравнение прямой n : $2 = 3 \cdot 1 + b$, $b = -1$. Тогда, $y = 3x - 1$ – уравнение прямой n .
2)	прямая n параллельна прямой t , $t: y = 2x + 6$, прямая n проходит через точку $(-3; 1)$.	Ответ: _____.
3)	прямая n параллельна оси абсцисс (Ox) и проходит через точку $(6; 7)$.	Ответ: _____.
4)	прямая n параллельна прямой p , $p: y = \frac{1}{2}x + 2,07$, прямая n проходит через начало координат.	Ответ: _____.
5)	прямая n параллельна оси ординат (Oy) и проходит через точку $(-3; 4)$.	Ответ: _____.

Задание 38. ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ.

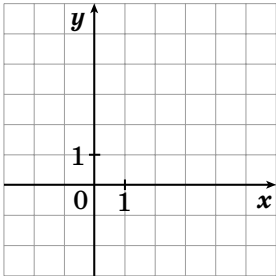
- Вставьте пропущенное слово.

1) В прямоугольной системе координат уравнение _____ имеет вид $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, где r – радиус, а точка $C(x_0; y_0)$ – центр.
2) Уравнение _____ в прямоугольной системе координат имеет вид $ax + by + c = 0$.
3) Если уравнение прямой записано в виде $y = kx + d$, то число k называется _____ коэффициентом.
4) Если в уравнениях прямых: $y = k_1x + d_1$ и $y = k_2x + d_2$ угловые коэффициенты не равны, то прямые _____.
5) Если в уравнениях прямых: $y = k_1x + d_1$ и $y = k_2x + d_2$ угловые коэффициенты равны, а $d_1 \neq d_2$, то прямые _____.

- Определите, верно ли утверждение.

	Да/нет
6) Уравнение окружности с центром в точке $(4; -1)$ и радиусом, равным 3, имеет вид $(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 9$.	
7) Уравнение окружности с центром в точке $(4; -1)$ и радиусом, равным 3, имеет вид $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 3$.	
8) Уравнение окружности с центром в точке $(4; -1)$ и радиусом, равным 3, имеет вид $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 9$.	
9) Прямая $3x - 7y = 0$ проходит через начало координат.	
10) Прямая $y + 5 = 0$ параллельна оси ординат.	

- Выполните задание.

11) Нарисуйте окружность, заданную уравнением $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$. 	13) Составьте уравнение прямой, параллельной прямой $y = 5x + 3$ и проходящей через точку $(1; 1)$. Ответ: _____.	15) Составьте уравнение прямой, проходящей через точки $(-2; 3)$ и $(2; -5)$.
12) Проходит ли окружность, заданная уравнением $(x + 2)^2 + (y - 7)^2 = 25$ через точку $(-6; 4)$? Ответ: _____.	14) Составьте уравнения прямых, проходящих через точку $(3; 1)$, параллельно осям координат. Ответ: _____.	Ответ: _____.

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ТРЕУГОЛЬНИКА. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС, КОТАНГЕНС УГЛА



Важно знать:

В прямоугольной системе координат Oxy на единичной полуокружности (радиус равен 1) выберем точку $M(x; y)$.

Для любого угла α из промежутка $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$

• **синусом** угла α называется ордината точки M , $0 \leq \sin \alpha \leq 1$.

• **косинусом** угла α называется абсцисса точки M ,

$$-1 \leq \cos \alpha \leq 1; \quad \text{при } 0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ \cos \alpha \geq 0;$$

$$\text{при } 90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ \cos \alpha \leq 0.$$

• **тангенсом** угла α ($\alpha \neq 90^\circ$) называется отношение синуса угла α к косинусу угла α .

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

$$\operatorname{tg} 0^\circ = 0, \operatorname{tg} 90^\circ \text{ не определён, } \operatorname{tg} 180^\circ = 0.$$

• **котангенсом** угла α называется отношение косинуса угла α к синусу угла α .

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

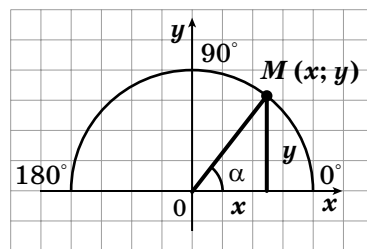
$$\operatorname{ctg} 0^\circ \text{ не определён, } \operatorname{ctg} 90^\circ = 0, \operatorname{ctg} 180^\circ \text{ не определён.}$$

Основное тригонометрическое тождество $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Значит, $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$, $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$.

Формулы приведения. При $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$, $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$,

при $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$.



Задание 39. Найдите неизвестную величину.

А.

1) $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, $\sin \alpha = ?$ По основному тригонометрическому тождеству $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$. Тогда, $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, $\sin \alpha = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.	4) $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin \alpha = ?$ Ответ: _____.
2) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin \alpha = ?$ Ответ: _____.	5) $\cos \alpha = 1$, $\sin \alpha = ?$ Ответ: _____.
3) $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$, $\sin \alpha = ?$ Ответ: _____.	6) $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, $\sin \alpha = ?$ Ответ: _____.

Б.

1) $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, $\cos \alpha = ?$ По основному тригонометрическому тождеству $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Тогда, $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ $\cos \alpha = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ или $\cos \alpha = -\sqrt{\frac{3}{4}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ответ: $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$.	4) $\sin \alpha = 0$, $\cos \alpha = ?$ Ответ: _____.
2) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$, $\cos \alpha = ?$ Ответ: _____.	5) $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\cos \alpha = ?$ Ответ: _____.
3) $\sin \alpha = 1$, $\cos \alpha = ?$ Ответ: _____.	6) $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, $\cos \alpha = ?$ Ответ: _____.

В.

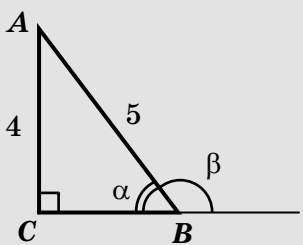
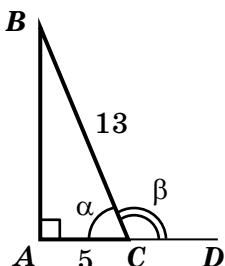
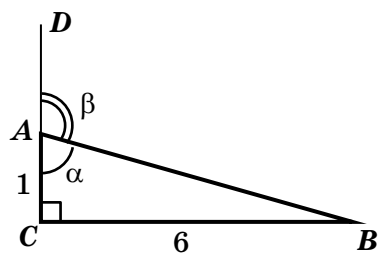
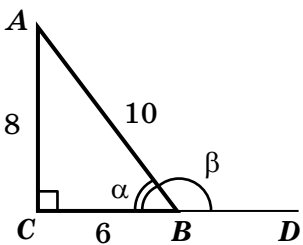
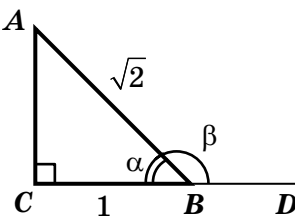
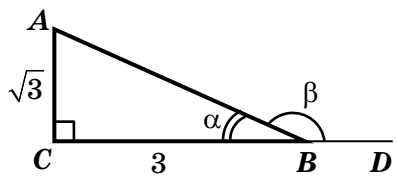
1) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} \alpha = ?$ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$. • По основному тригонометрическому тождеству $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Тогда, $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{2}{4} = \frac{2}{4}$, значит, $\sin \alpha = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. • $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$. Ответ: 1.	4) $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, $\operatorname{tg} \alpha = ?$ Ответ: _____.
2) $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = ?$ Ответ: _____.	5) $\sin \alpha = \frac{5}{13}$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, $\operatorname{tg} \alpha = ?$ Ответ: _____.
3) $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} \alpha = ?$ Ответ: _____.	6) $\cos \alpha = -1$, $\operatorname{tg} \alpha = ?$ Ответ: _____.

Задание 40. Выполните задания, зная, что углы α и β смежные.

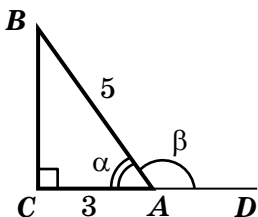
А.

1) $\sin \alpha = 0,4$ $\sin \beta = ?$	4) $\cos \alpha = \frac{1}{4}$ $\cos \beta = ?$	7) $\operatorname{tg} \alpha = 2$ $\operatorname{tg} \beta = ?$
2) $\sin \alpha = 0,1$ $\sin \beta = ?$	5) $\cos \alpha = -0,3$ $\cos \beta = ?$	8) $\operatorname{tg} \beta = -\sqrt{3}$ $\operatorname{tg} \alpha = ?$
3) $\sin \beta = \frac{1}{3}$ $\sin \alpha = ?$	6) $\cos \beta = 0,7$ $\cos \alpha = ?$	9) $\operatorname{tg} \alpha = -2,5$ $\operatorname{tg} \beta = ?$

Б.

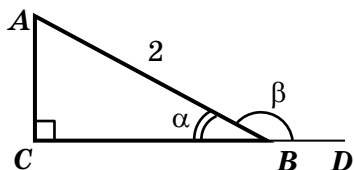
1) $\sin \beta = ?$  $\triangle ABC$ – прямоугольный, $\angle C = 90^\circ$, $\sin \alpha = \frac{CA}{AB} = \frac{4}{5}$. Т.к. углы β и α смежные, то $\sin \beta = \sin \alpha = \frac{4}{5} = 0,8$. Ответ: 0,8.	3) $\cos \beta = ?$  Ответ: _____.	5) $\operatorname{tg} \beta = ?$  Ответ: _____.
2) $\sin \beta = ?$  Ответ: _____.	4) $\cos \beta = ?$  Ответ: _____.	6) $\operatorname{tg} \beta = ?$  Ответ: _____.

7) $\sin \beta - ?$



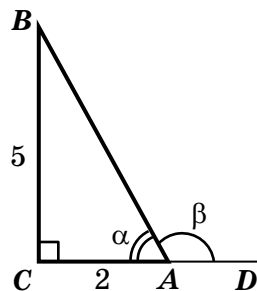
Ответ: _____.

10) $\cos \beta - ?$



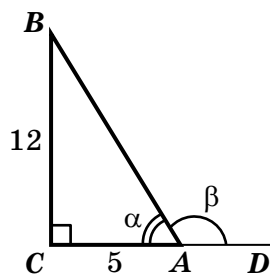
Ответ: _____.

13) $\operatorname{ctg} \beta - ?$



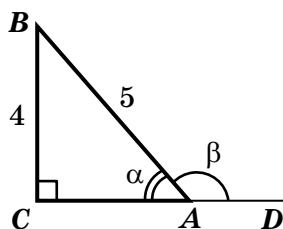
Ответ: _____.

8) $\cos \beta - ?$



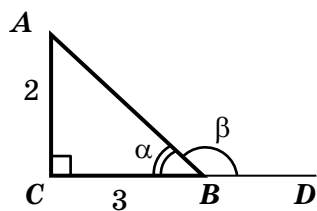
Ответ: _____.

11) $\operatorname{tg} \beta - ?$



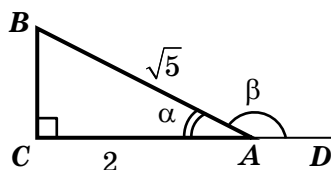
Ответ: _____.

14) $\operatorname{ctg} \beta - ?$



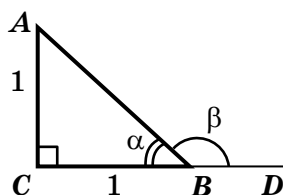
Ответ: _____.

9) $\operatorname{tg} \beta - ?$



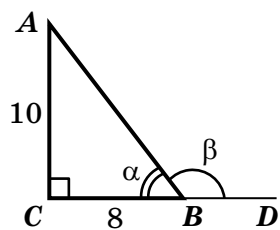
Ответ: _____.

12) $\sin \beta - ?$



Ответ: _____.

15) $\operatorname{ctg} \beta - ?$



Ответ: _____.

Задание 41. ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ.

- Вставьте пропущенное слово/формулу.

1) Синусом угла α называется _____ точки единичной полуокружности.
2) Косинусом угла α называется _____ точки единичной полуокружности.
3) _____ угла α называется отношение синуса угла α к косинусу угла α .
4) _____ угла α называется отношение косинуса угла α к синусу угла α .
5) Основное тригонометрическое тождество _____.

- Определите, верно ли утверждение.

	Да/нет
6) Синус угла α может быть равен 2.	
7) Косинус угла α может быть равен -1 .	
8) Тангенс 90° не определён.	
9) Котангенс 0° равен 0.	
10) $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.	

- Выполните задание.

11) $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, $\sin \alpha = ?$	12) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \alpha = ?$	13) $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = ?$ $\operatorname{ctg} \alpha = ?$
Ответ: _____.	Ответ: _____.	Ответ: _____.

ТЕОРЕМА О ПЛОЩАДИ ТРЕУГОЛЬНИКА



Важно знать:

• **Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.**

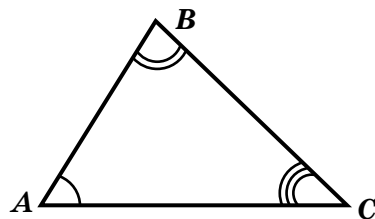
$$S = \frac{1}{2} ab \sin \alpha.$$

Для любого треугольника ABC имеют место равенства

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A$$

$$S = \frac{1}{2} BA \cdot BC \cdot \sin B$$

$$S = \frac{1}{2} CA \cdot CB \cdot \sin C.$$



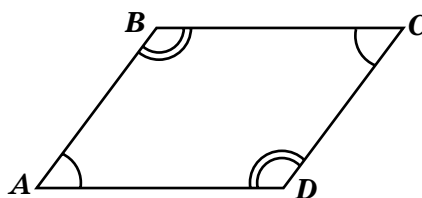
• **Площадь параллелограмма равна произведению двух его смежных сторон на синус угла между ними.**

$$S = ab \sin \alpha.$$

Для любого параллелограмма $ABCD$ имеют место равенства

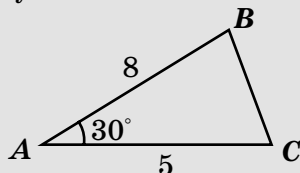
$$S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin A \quad S_{ABCD} = BA \cdot BC \cdot \sin B$$

$$S_{ABCD} = CB \cdot CD \cdot \sin C \quad S_{ABCD} = DA \cdot DC \cdot \sin D.$$



Задание 42. Найдите площадь данной фигуры.

1) ABC – треугольник

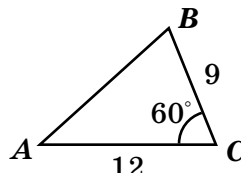


$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 10.$$

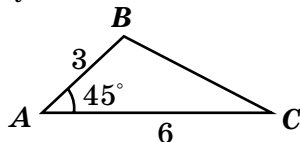
Ответ: $S_{ABC} = 10.$

3) ABC – треугольник



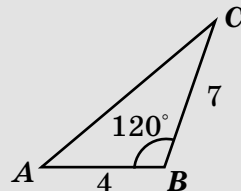
Ответ: $S_{ABC} = \underline{\hspace{2cm}}.$

2) ABC – треугольник



Ответ: $S_{ABC} = \underline{\hspace{2cm}}.$

4) ABC – треугольник



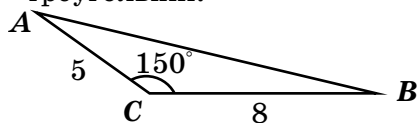
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin B, \sin B = \sin 120^\circ =$$

$$= \sin (180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 7\sqrt{3}.$$

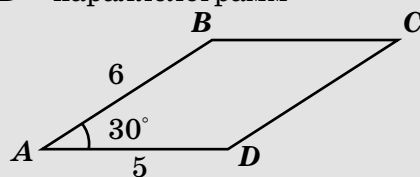
Ответ: $S_{ABC} = 7\sqrt{3}.$

5) ABC – треугольник



Ответ: $S_{ABC} = \underline{\hspace{2cm}}$.

9) $ABCD$ – параллелограмм

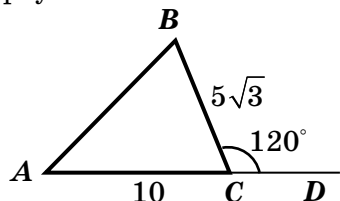


$$S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin A$$

$$S_{ABCD} = 5 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 15.$$

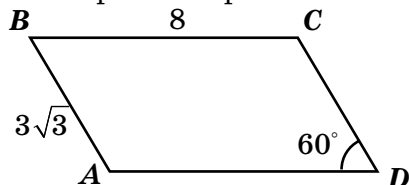
Ответ: $S_{ABCD} = 15$.

6) ABC – треугольник



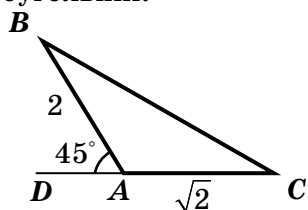
Ответ: $S_{ABC} = \underline{\hspace{2cm}}$.

10) $ABCD$ – параллелограмм



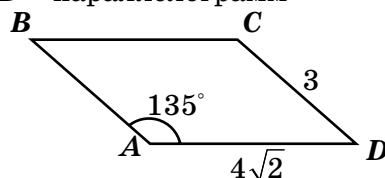
Ответ: $S_{ABCD} = \underline{\hspace{2cm}}$.

7) ABC – треугольник



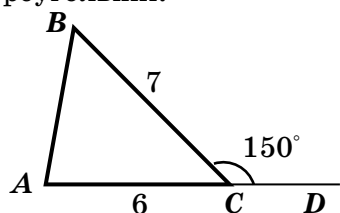
Ответ: $S_{ABC} = \underline{\hspace{2cm}}$.

11) $ABCD$ – параллелограмм



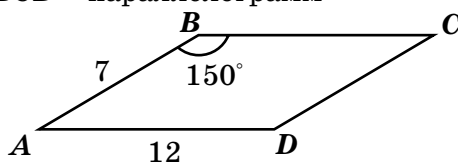
Ответ: $S_{ABCD} = \underline{\hspace{2cm}}$.

8) ABC – треугольник



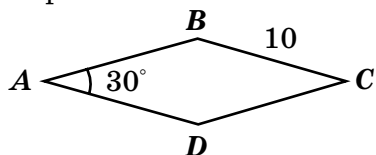
Ответ: $S_{ABC} = \underline{\hspace{2cm}}$.

12) $ABCD$ – параллелограмм



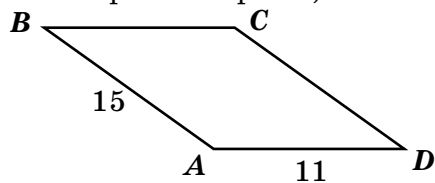
Ответ: $S_{ABCD} = \underline{\hspace{2cm}}$.

13) $ABCD$ – ромб



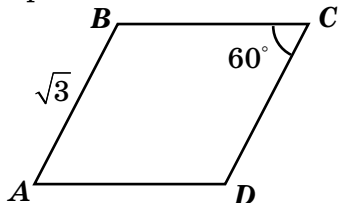
Ответ: $S_{ABCD} = \underline{\hspace{2cm}}$.

17) $ABCD$ – параллелограмм, $\sin B = 0,4$



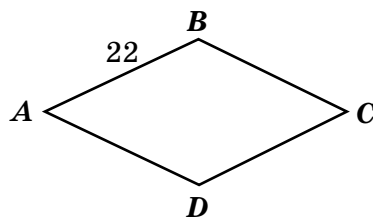
Ответ: $S_{ABCD} = \underline{\hspace{2cm}}$.

14) $ABCD$ – ромб



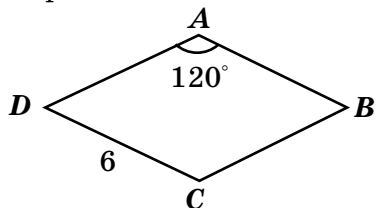
Ответ: $S_{ABCD} = \underline{\hspace{2cm}}$.

18) $ABCD$ – ромб, $\sin D = \frac{5}{11}$



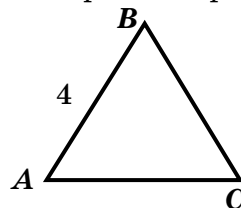
Ответ: $S_{ABCD} = \underline{\hspace{2cm}}$.

15) $ABCD$ – ромб



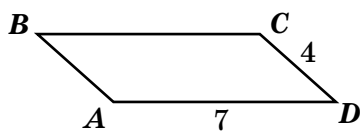
Ответ: $S_{ABCD} = \underline{\hspace{2cm}}$.

19) ABC – равносторонний треугольник



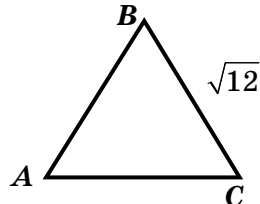
Ответ: $S_{ABC} = \underline{\hspace{2cm}}$.

16) $ABCD$ – параллелограмм, $\sin D = \frac{3}{7}$



Ответ: $S_{ABCD} = \underline{\hspace{2cm}}$.

20) ABC – равносторонний треугольник



Ответ: $S_{ABC} = \underline{\hspace{2cm}}$.



Важно знать:

Площадь выпуклого четырёхугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi.$$

Например, для четырёхугольника $ABCD$

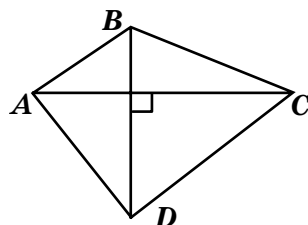
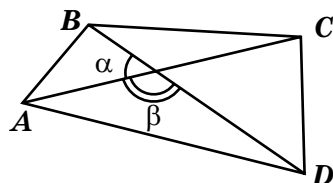
$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \alpha \text{ или } S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \beta,$$

где углы α и β – смежные.

• Если диагонали выпуклого четырёхугольника взаимно перпендикулярны, то его площадь равна половине произведения диагоналей.

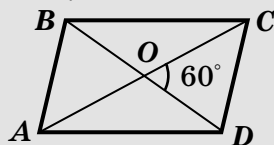
Например, для четырёхугольника $ABCD$, $AC \perp BD$,

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD.$$



Задание 43. Найдите площадь данной фигуры.

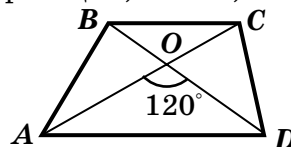
1) $ABCD$ – параллелограмм,
 $AC = 16$, $BD = 14$.



$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \angle DOC = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 14 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 56\sqrt{3}. \end{aligned}$$

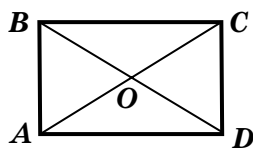
Ответ: $S_{ABCD} = 56\sqrt{3}$.

3) $ABCD$ – трапеция, $AC = 7$, $BD = 6$.



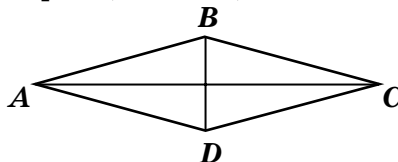
Ответ: $S_{ABCD} = \underline{\hspace{2cm}}$.

2) $ABCD$ – прямоугольник,
 $AC = 12$, $\sin \angle COD = \frac{2}{3}$.



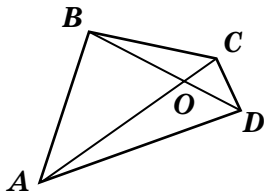
Ответ: $S_{ABCD} = \underline{\hspace{2cm}}$.

4) $ABCD$ – ромб, $AC = 15$, $BD = 6$.



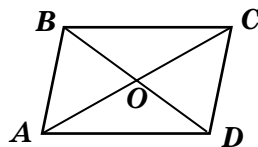
Ответ: $S_{ABCD} = \underline{\hspace{2cm}}$.

5) $ABCD$ – четырёхугольник, $AC = 8$,
 $BD = 9$, $\sin \angle AOB = \frac{2}{3}$.



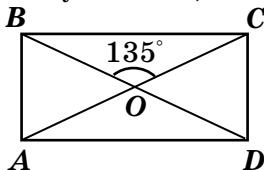
Ответ: $S_{ABCD} = \underline{\hspace{2cm}}$.

9) $ABCD$ – параллелограмм, $AO = 7$,
 $BO = 5$, $\sin \angle BOC = \frac{2\sqrt{7}}{7}$.



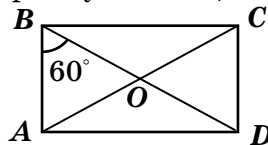
Ответ: $S_{ABCD} = \underline{\hspace{2cm}}$.

6) $ABCD$ – прямоугольник, $BD = 16$.



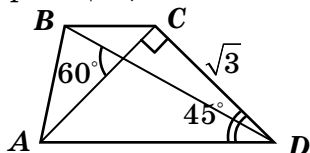
Ответ: $S_{ABCD} = \underline{\hspace{2cm}}$.

10) $ABCD$ – прямоугольник, $BD = 20$.



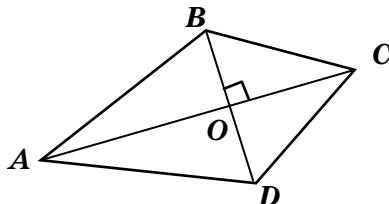
Ответ: $S_{ABCD} = \underline{\hspace{2cm}}$.

7) $ABCD$ – трапеция, $BD = 3$.



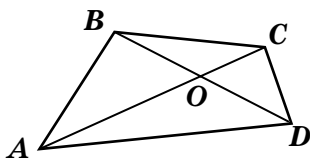
Ответ: $S_{ABCD} = \underline{\hspace{2cm}}$.

11) $ABCD$ – четырёхугольник, $AC = 25$,
 $BD = 8$.



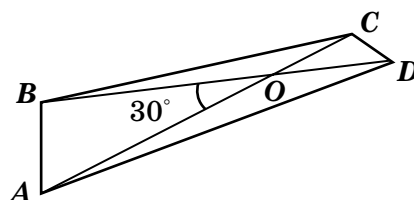
Ответ: $S_{ABCD} = \underline{\hspace{2cm}}$.

8) $ABCD$ – четырёхугольник,
 $AC = 16$, $BD = 9$, $\sin \angle COD = \frac{3}{4}$.



Ответ: $S_{ABCD} = \underline{\hspace{2cm}}$.

12) $ABCD$ – четырёхугольник,
 $AC = BD = \sqrt{6}$.



Ответ: $S_{ABCD} = \underline{\hspace{2cm}}$.

Задание 44. ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ.

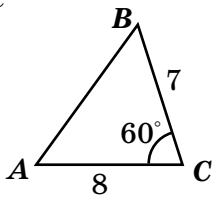
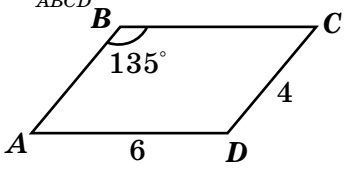
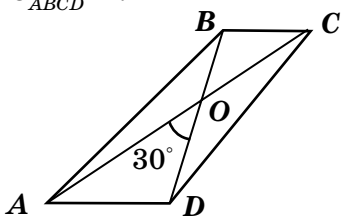
- Вставьте пропущенное слово/слова.

1) Площадь _____ равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.
2) Площадь _____ равна произведению двух его смежных сторон на синус угла между ними.
3) Площадь выпуклого четырёхугольника равна половине произведения его _____ на синус угла между ними.
4) Площадь выпуклого четырёхугольника равна половине произведения его диагоналей, если они _____.

- Определите, верно ли утверждение.

	Да/нет
5) Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на косинус угла между ними.	
6) Площадь треугольника равна произведению двух сторон на синус угла между ними.	
7) Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катета и гипотенузы на синус угла между ними.	
8) Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.	
9) Площадь прямоугольника равна половине произведения его диагоналей.	

- Выполните задание.

10) ABC – треугольник. $S_{ABC} = ?$  Ответ: _____.	11) $ABCD$ – параллелограмм $S_{ABCD} = ?$  Ответ: _____.	12) $ABCD$ – параллелограмм $AC = 12, BD = 10.$ $S_{ABCD} = ?$  Ответ: _____.
--	--	--

ТЕОРЕМА СИНУСОВ



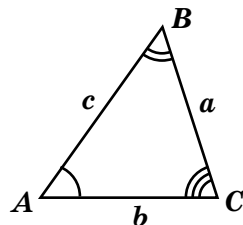
Важно знать:

Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Для любого треугольника ABC со сторонами $AB = c$, $BC = a$ и $CA = b$ имеют место равенства

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R, \text{ где } R - \text{радиус описанной окружности.}$$



Задание 45. Найдите x – длину стороны $\triangle ABC$.

1) По теореме синусов $\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A}$, $\frac{7}{\frac{1}{2}} = \frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}}, \quad \frac{7\sqrt{2}}{2} = \frac{x}{2}, \quad x = 7\sqrt{2}.$ Ответ: $7\sqrt{2}$.	5) Ответ: _____.
2) Ответ: _____.	6) Ответ: _____.
3) Ответ: _____.	7) $\sin A = 0,3$, $\sin C = 0,2$ Ответ: _____.
4) Ответ: _____.	8) $\sin C = \frac{1}{4}$, $\sin B = \frac{5}{6}$ Ответ: _____.

Задание 46. В треугольнике против стороны a лежит угол A , R – радиус окружности, описанной около данного треугольника. Заполните таблицу.

	a	$\sin A$	R
1)	8	0,2	$2R = \frac{8}{0,2} = 40,$ $R = 20.$
2)	12	0,3	
3)	$2\sqrt{3}$	$\frac{1}{5}$	
4)	5		10
5)	7		5
6)	$\sqrt{8}$		2
7)		$\frac{1}{3}$	6
8)		$\frac{3}{4}$	12
9)		$\frac{\sqrt{7}}{7}$	$\frac{\sqrt{7}}{2}$
10)	3	0,6	

ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ



Важно знать:

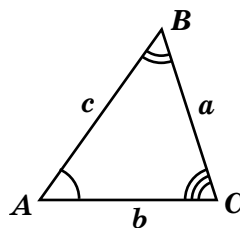
Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон, умноженное на косинус угла между ними.

Для любого треугольника ABC со сторонами $AB = c$, $BC = a$ и $CA = b$ имеют место равенства

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B,$$

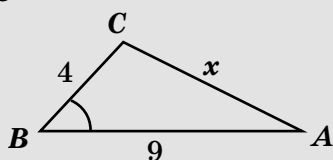
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$



Задание 47. Найдите x – длину стороны треугольника.

А.

1) $\cos B = \frac{2}{3}$



По теореме косинусов

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cos B,$$

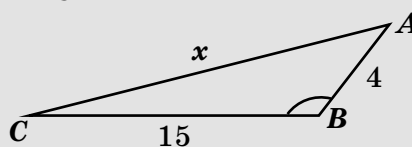
$$x^2 = 9^2 + 4^2 - 2 \cdot 9 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} = 81 + 16 - 48 =$$

$$= 97 - 48 = 49,$$

$$x = 7.$$

Ответ: 7.

4) $\cos B = -\frac{1}{8}$



По теореме косинусов

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cos B,$$

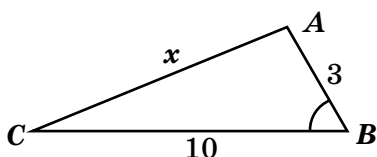
$$x^2 = 15^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 15 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) =$$

$$= 225 + 16 + 15 = 256,$$

$$x = 16.$$

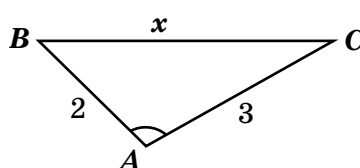
Ответ: 16.

2) $\cos B = \frac{3}{4}$



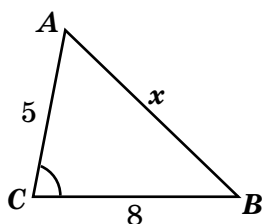
Ответ: _____.

5) $\cos A = -\frac{1}{4}$



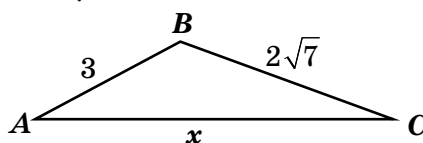
Ответ: _____.

3) $\cos C = 0,1$



Ответ: _____.

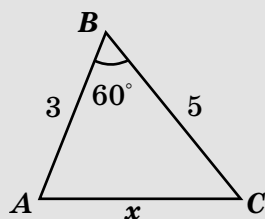
6) $\cos B = -\frac{\sqrt{7}}{7}$



Ответ: _____.

Б.

1)



По теореме косинусов

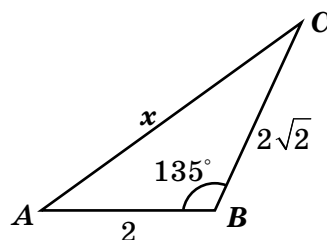
$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos B,$$

$$AC^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 25 + 9 - 15 = 19,$$

$$AC = \sqrt{19}, x = \sqrt{19}.$$

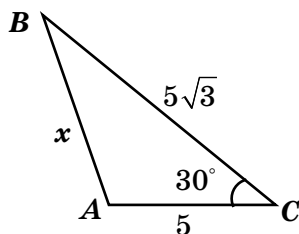
Ответ: $\sqrt{19}$.

5)



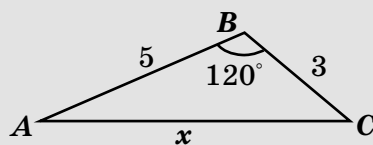
Ответ: _____.

2)



Ответ: _____.

6)



По теореме косинусов

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos B,$$

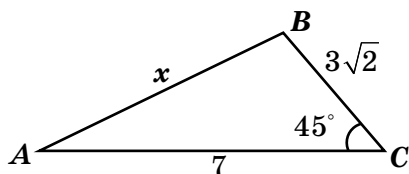
$$AC^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 25 + 9 + 15 = 49,$$

$$AC = 7,$$

$$x = 7.$$

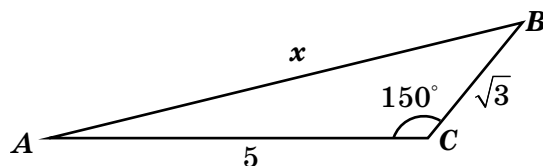
Ответ: 7.

3)



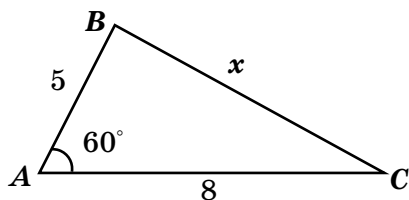
Ответ: _____.

7)



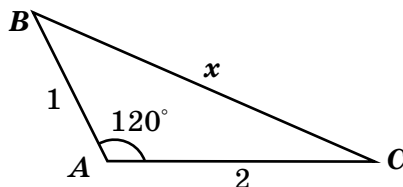
Ответ: _____.

4)



Ответ: _____.

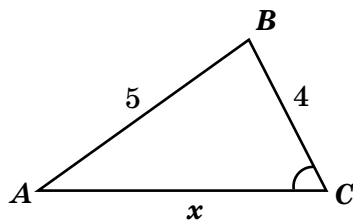
8)



Ответ: _____.

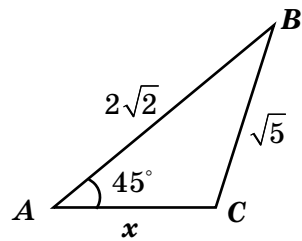
B.

1) $\cos C = 0,4$



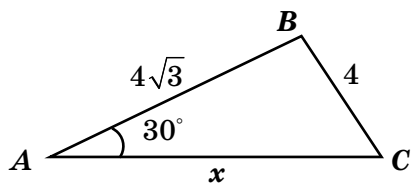
Ответ: _____.

3)



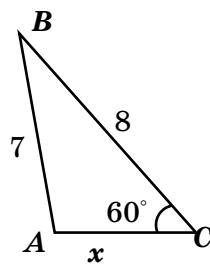
Ответ: _____.

2)



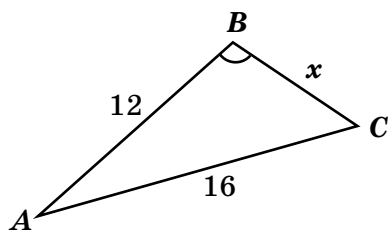
Ответ: _____.

4)



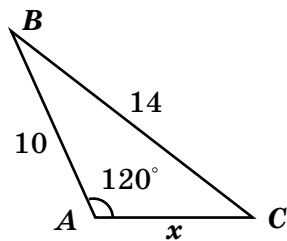
Ответ: _____.

5) $\cos B = -\frac{1}{4}$



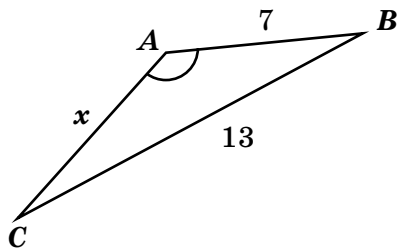
Ответ: _____.

7)



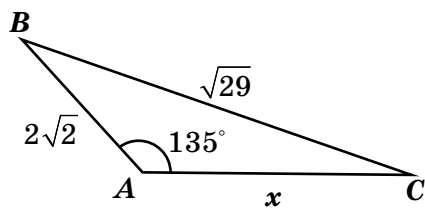
Ответ: _____.

6) $\cos A = -\frac{1}{7}$



Ответ: _____.

8)



Ответ: _____.



Важно знать:

С помощью теоремы косинусов можно находить косинус угла треугольника.

Для любого треугольника ABC со сторонами $AB = c$, $BC = a$ и $CA = b$ имеют место равенства

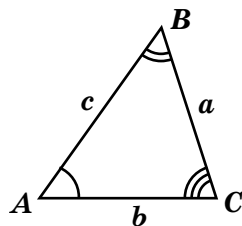
$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Пусть один из углов треугольника равен α .

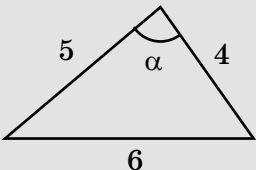
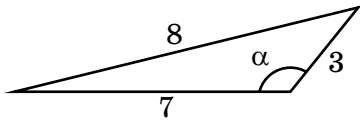
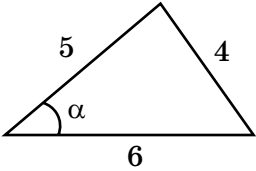
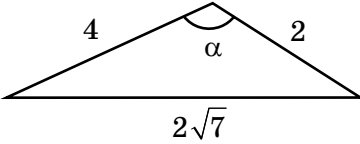
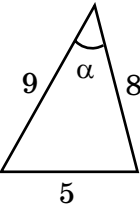
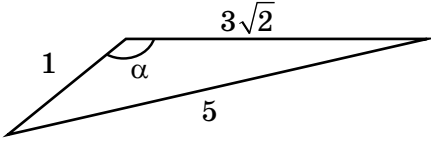
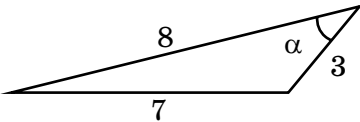
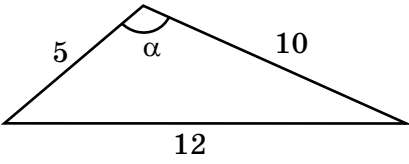
Если $\cos \alpha = 0$, то треугольник – прямоугольный;

если $\cos \alpha < 0$, то треугольник – тупоугольный.

В остроугольном треугольнике косинусы всех углов положительные.



Задание 48. Найдите косинус угла α .

1)  $\cos \alpha = \frac{4^2 + 5^2 - 6^2}{2 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{16 + 25 - 36}{8 \cdot 5} = \frac{5}{8 \cdot 5} = \frac{1}{8}.$ Ответ: $\frac{1}{8}$.	5)  Ответ: _____.
2)  Ответ: _____.	6)  Ответ: _____.
3)  Ответ: _____.	7)  Ответ: _____.
4)  Ответ: _____.	8)  Ответ: _____.

Задание 49. Определите, является ли треугольник ABC а) остроугольным, б) прямоугольным, в) тупоугольным.

1) $AB = 4$, $BC = 5$, $AC = 6$. AC – бóльшая сторона $\triangle ABC$, значит, угол B – бóльший угол $\triangle ABC$. $\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{16 + 25 - 36}{2 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}.$ $\cos B > 0$, значит, угол B – острый, тогда $\triangle ABC$ – остроугольный. Ответ: а).	5) $AB = 2\sqrt{3}$, $BC = 2$, $AC = 2$. Ответ: _____.
2) $AB = 8$, $BC = 16$, $AC = 15$. Ответ: _____.	6) $AB = 2$, $BC = 3$, $AC = \sqrt{5}$. Ответ: _____.
3) $AB = \sqrt{7}$, $BC = 4$, $AC = 3$. Ответ: _____.	7) $AB = 7$, $BC = \sqrt{7}$, $AC = 2\sqrt{21}$. Ответ: _____.
4) $AB = \sqrt{11}$, $BC = \sqrt{5}$, $AC = 3$. Ответ: _____.	8) $AB = 3\sqrt{2}$, $BC = 2\sqrt{3}$, $AC = \sqrt{6}$. Ответ: _____.

Задание 50. ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ.

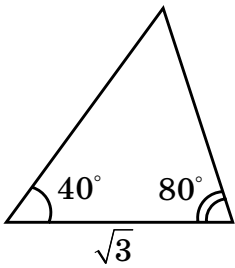
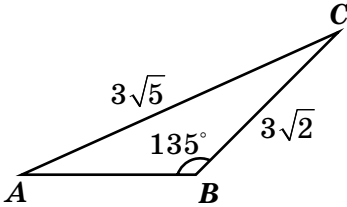
- Вставьте пропущенное слово.

1) Стороны треугольника пропорциональны _____ противолежащих углов.
2) Отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно удвоенному радиусу _____ окружности.
3) Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон, умноженное на _____ угла между ними.
4) Если косинусы всех углов треугольника положительные, то треугольник – _____.
5) Если косинус одного из углов треугольника равен нулю, то треугольник – _____.
6) Если косинус одного из углов треугольника отрицательный, то треугольник – _____.

- Определите, верно ли утверждение.

	Да/нет
7) Стороны треугольника пропорциональны косинусам противолежащих углов.	
8) Отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно радиусу описанной окружности.	
9) Отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру описанной окружности.	
10) Если косинус угла A треугольника ABC отрицательный, то угол ABC – тупой.	
11) Если AB – гипотенуза прямоугольного треугольника ABC , то косинус угла C равен нулю.	

- Выполните задание.

12) ABC – треугольник, R – радиус описанной окружности. $R = ?$  Ответ: _____.	13) ABC – треугольник. $AB = ?$  Ответ: _____.	14) Определите вид треугольника ABC: а) остроугольный; б) прямоугольный; в) тупоугольный, если $AB = 2, BC = 3, AC = 4$. Ответ: _____.
--	---	---

СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ



Важно знать:

• Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – два данных вектора, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ и $\angle AOB = \alpha$.

Тогда угол $\angle AOB$ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Обозначается $(\widehat{\vec{a}\vec{b}}) = \alpha$.

Два вектора называются **перпендикулярными**, если угол между ними равен 90° .

Если два вектора сонаправленные, один из них или оба – нулевые, то угол между ними равен 0° .

• **Скалярным произведением двух векторов** называется произведение их длин на косинус угла между ними.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $\vec{a} \cdot \vec{b}$ или $\vec{a}\vec{b}$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}}).$$

От знака $\cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}})$, т.е. от величины угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, зависит знак скалярного произведения $\vec{a} \cdot \vec{b}$:

$$(\widehat{\vec{a}\vec{b}}) < 90^\circ, \vec{a} \cdot \vec{b} > 0; \quad (\widehat{\vec{a}\vec{b}}) = 90^\circ, \vec{a} \cdot \vec{b} = 0; \quad (\widehat{\vec{a}\vec{b}}) > 90^\circ, \vec{a} \cdot \vec{b} < 0.$$

Скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{a}$ называется **скалярным квадратом** вектора $\vec{a}$ и обозначается $\vec{a}^2$. Таким образом, скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2.$$

Задание 51. Заполните таблицу.

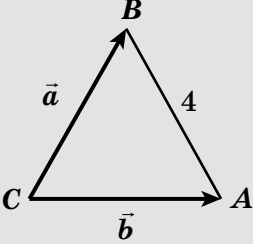
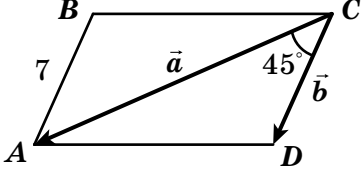
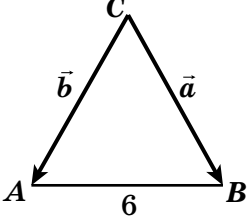
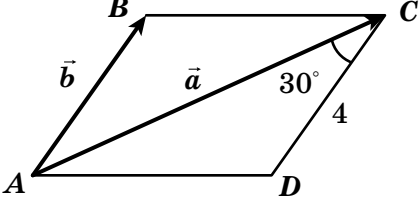
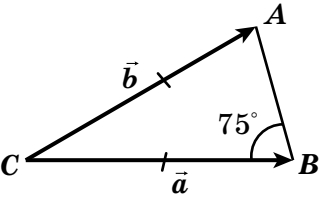
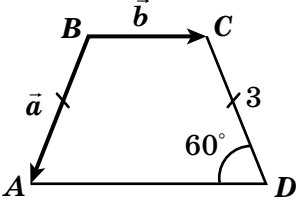
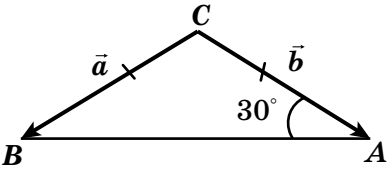
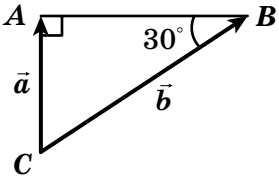
А.

	$ \vec{a} $	$ \vec{b} $	$\cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}})$	$\vec{a} \cdot \vec{b}$
1)	5	9	$\frac{1}{3}$	$5 \cdot 9 \cdot \frac{1}{3} = 15$
2)	2	3	0,4	
3)	3	7	-0,1	
4)	2	5	$\frac{3}{2 \cdot 5} = 0,3$	3
5)	4	6		12
6)	0,5	8		3
7)	12	10		-15
8)	4	3	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	

Б.

	$ \vec{a} $	$ \vec{b} $	$\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right)$	$\vec{a} \cdot \vec{b}$
1)	3	2	60°	$3 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ = 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 3$
2)	9	8	60°	
3)	4	5	30°	
4)	10	7	45°	
5)	6	5	120°	
6)	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}$	150°	
7)	$5\sqrt{2}$	6	135°	
8)	14	$\sqrt{37}$	90°	
9)	3	7	0°	
10)	2	5	180°	
11)	12	7	60°	
12)	$\sqrt{6}$	$\sqrt{2}$	30°	

Задание 52. Найдите $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

1) Треугольник ABC – равносторонний.  Треугольник ABC – равносторонний, значит, $AB = BC = AC = 4$ и $\angle BCA = 60^\circ$. $\vec{a} = BC = 4$, $\vec{b} = AC = 4$, $(\widehat{\vec{a}\vec{b}}) = \angle BCA = 60^\circ$; $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ = 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 8$ Ответ: 8.	5) $ABCD$ – параллелограмм, $AC = 16$.  Ответ: _____.
2) Треугольник ABC – равносторонний.  Ответ: _____.	6) $ABCD$ – параллелограмм, $AC = 7$.  Ответ: _____.
3) Треугольник ABC – равнобедренный, $AC = 10$.  Ответ: _____.	7) $ABCD$ – равнобедренная трапеция, $BC = 2$.  Ответ: _____.
4) Треугольник ABC – равнобедренный, $AC = 8$.  Ответ: _____.	8) Треугольник ABC – прямоугольный, $AC = 5$.  Ответ: _____.



Важно знать:

В прямоугольной системе координат скалярное произведение векторов $\vec{a}\{x_1; y_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2\}$ выражается формулой: $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$.

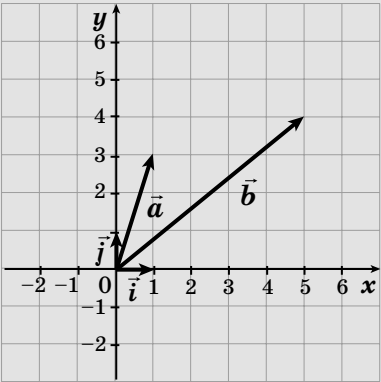
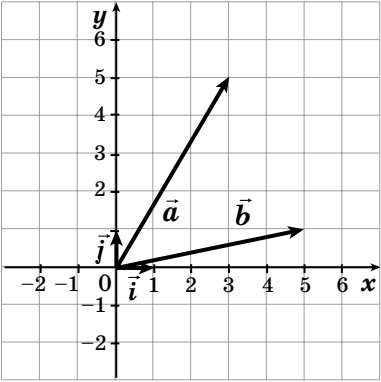
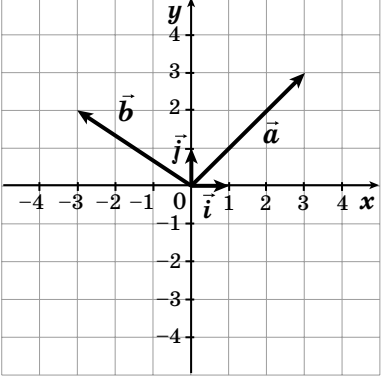
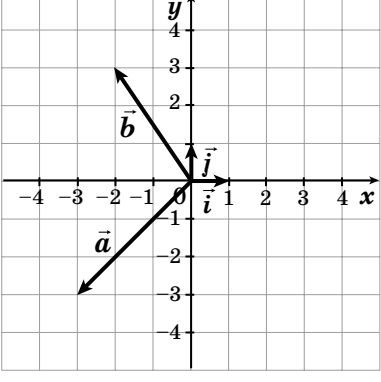
Ненулевые векторы $\vec{a}\{x_1; y_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2\}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда $x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$.

Если $x_1 x_2 + y_1 y_2 > 0$, то $(\vec{a} \cdot \vec{b}) < 90^\circ$; если $x_1 x_2 + y_1 y_2 < 0$, то $(\vec{a} \cdot \vec{b}) > 90^\circ$.

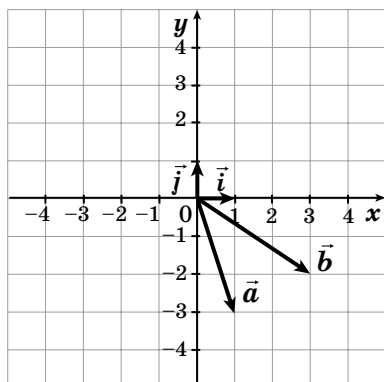
Задание 53. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и определите вид угла между этими векторами: острый, прямой или тупой.

	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{a} \cdot \vec{b}$	Угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$
1)	$\{1; 3\}$	$\{2; 5\}$	$1 \cdot 2 + 3 \cdot 5 = 17$	$17 > 0$, значит, угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$ острый.
2)	$\{2; 7\}$	$\{4; 1\}$		
3)	$\{6; 0\}$	$\{3; 11\}$		
4)	$\{-1; 2\}$	$\{4; 9\}$		
5)	$\{5; -3\}$	$\{-2; 1\}$		
6)	$\{-4; -10\}$	$\{9; -3\}$		
7)	$\{0; -3\}$	$\{2; -2\}$		
8)	$\{6; -4\}$	$\{6; 9\}$		
9)	$\{3; 8\}$	$\{-16; 6\}$		
10)	$\{-1; -9\}$	$\{-2; 1\}$		

Задание 54. Найдите $\vec{a} \cdot \vec{b}$.
 А.

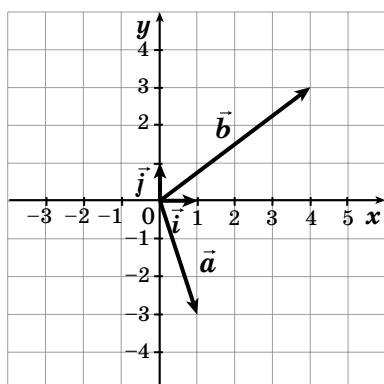
1)		• Определим координаты векторов: $\vec{a}\{1;3\}, \vec{b}\{5;4\}$. • Найдём скалярное произведение векторов $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 5 + 3 \cdot 4 = 5 + 12 = 17$. Ответ: 17.
2)		Ответ: _____.
3)		Ответ: _____.
4)		Ответ: _____.

5)



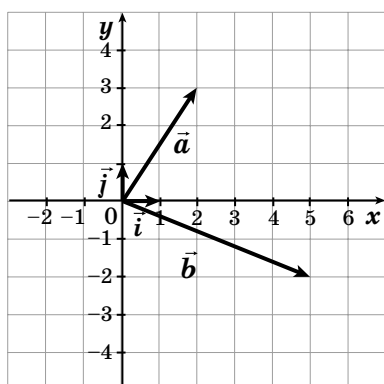
Ответ: _____.

6)



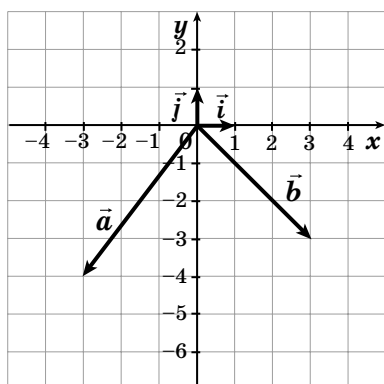
Ответ: _____.

7)



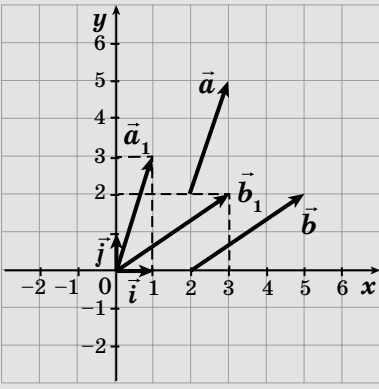
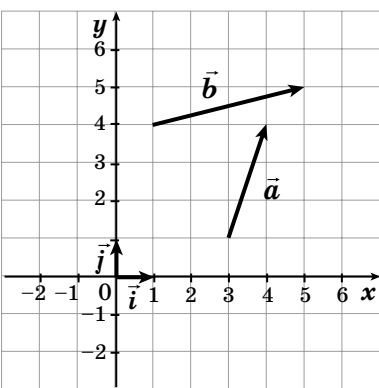
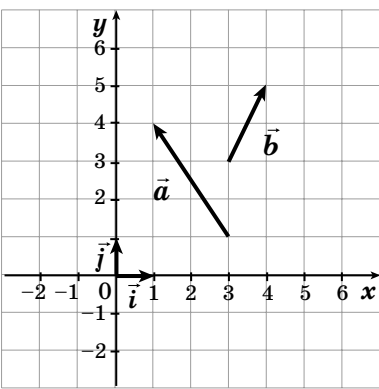
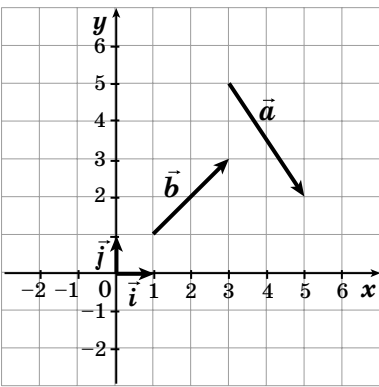
Ответ: _____.

8)

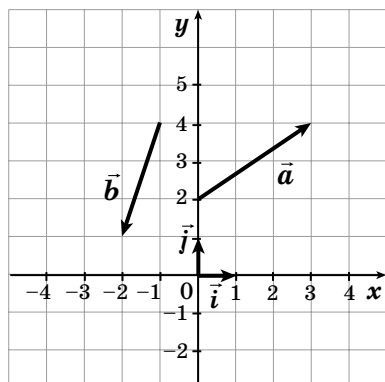


Ответ: _____.

Б.

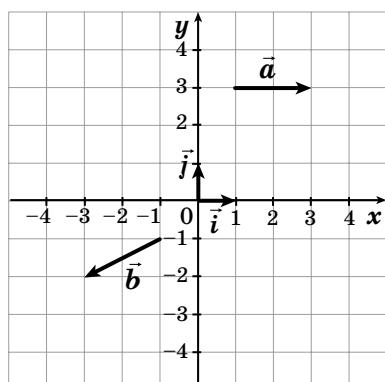
1)		• Построим вектора $\vec{a}_1$ и $\vec{b}_1$ с началом в точке $O(0;0)$: $\vec{a}_1 = \vec{a}$, $\vec{b}_1 = \vec{b}$. • Определим координаты векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{b}_1$: $\vec{a}_1 \{1;3\}$, $\vec{b}_1 \{3;2\}$. Тогда, $\vec{a} \{1;3\}$, $\vec{b} \{3;2\}$. • Найдём скалярное произведение векторов $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 3 + 6 = 9$. Ответ: 9.
2)		Ответ: _____.
3)		Ответ: _____.
4)		Ответ: _____.

5)



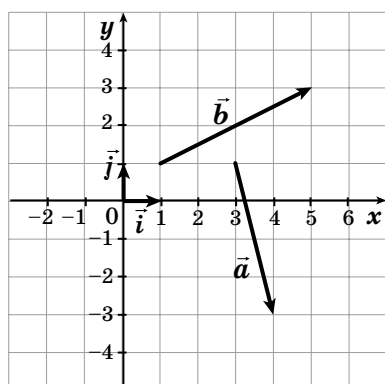
Ответ: _____.

6)



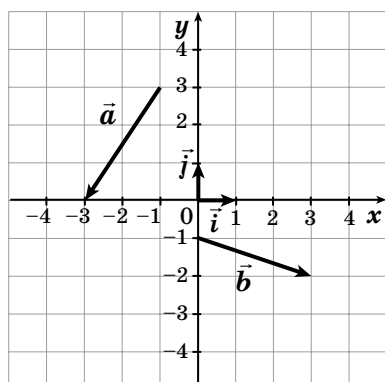
Ответ: _____.

7)



Ответ: _____.

8)



Ответ: _____.



Важно знать:

Свойства скалярного произведения векторов

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и любого числа k справедливы соотношения:

1. $\vec{a}^2 \geq 0$, причём $\vec{a}^2 > 0$ при $\vec{a} \neq \vec{0}$.
2. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (переместительный закон).
3. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ (распределительный закон).
4. $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$ (сочетательный закон).

Задание 55. Вычислите скалярное произведение, зная координаты векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$:
 $\vec{a} \{5; 1\}$ $\vec{b} \{2; -4\}$ $\vec{c} \{-1; 3\}$

1)	$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})$	• $\vec{a} \{5; 1\}$, $(\vec{b} + \vec{c}) = \{1; -1\}$ • $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = 5 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 5 - 1 = 4$. Ответ: 4.
2)	$\vec{b} \cdot (\vec{a} + \vec{c})$	Ответ: _____.
3)	$\vec{c} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$	Ответ: _____.
4)	$\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c})$	Ответ: _____.
5)	$\vec{b} \cdot (\vec{a} - \vec{c})$	Ответ: _____.
6)	$\vec{c} \cdot (\vec{b} - \vec{a})$	Ответ: _____.
7)	$2\vec{a} \cdot 2\vec{b}$	Ответ: _____.
8)	$3\vec{c} \cdot \frac{1}{2}\vec{b}$	Ответ: _____.



Важно знать:

Косинус угла α между ненулевыми векторами $\vec{a}\{x_1; y_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2\}$ выражается формулой

$$\cos \alpha = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}.$$

Задание 56. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, заполнив таблицу.

	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$ \vec{a} $	$ \vec{b} $	$\cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}})$
1)	$\{4; 0\}$	$\{3; 4\}$	$\sqrt{4^2 + 0^2} = 4$	$\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$	$\frac{4 \cdot 3 + 0 \cdot 4}{4 \cdot 5} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$ Ответ: $\frac{3}{5}$.
2)	$\{6; 8\}$	$\{0; 5\}$			Ответ: _____.
3)	$\{2; \sqrt{5}\}$	$\{4; 2\sqrt{5}\}$			Ответ: _____.
4)	$\{-7; 0\}$	$\{1; \sqrt{3}\}$			Ответ: _____.
5)	$\{-4; 2\}$	$\{2; 2\}$			Ответ: _____.
6)	$\{-1; -2\}$	$\{-2; 4\}$			Ответ: _____.
7)	$\{-4; 6\}$	$\{3; 2\}$			Ответ: _____.
8)	$\{1; 2\}$	$\{3; -1\}$			Ответ: _____.

Задание 57. ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ.

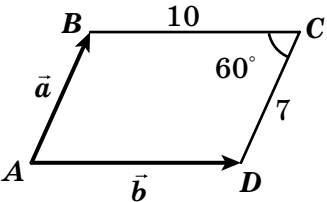
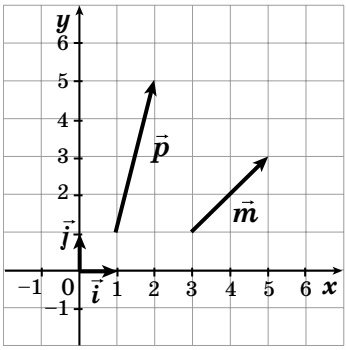
- Вставьте пропущенное слово/слова/формулу.

1) Если угол между двумя векторами равен 90° , то эти векторы называются _____.
2) Произведение длин двух векторов на косинус угла между ними называется их _____.
3) Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: _____.
4) Скалярный квадрат вектора равен квадрату его _____.
5) В прямоугольной системе координат скалярное произведение векторов $\vec{a}\{x_1;y_1\}$ и $\vec{b}\{x_2;y_2\}$ выражается формулой _____.
6) Косинус угла α между ненулевыми векторами $\vec{a}\{x_1;y_1\}$ и $\vec{b}\{x_2;y_2\}$ выражается формулой $\cos\alpha =$ _____.

- Определите, верно ли утверждение.

	Да/нет
7) Если вектор $\vec{a}$ перпендикулярен вектору $\vec{b}$, то угол между ними равен 0° .	
8) Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправленные, то угол между ними равен 0° .	
9) Если вектор $\vec{a}$ перпендикулярен вектору $\vec{b}$, то их скалярное произведение равно нулю.	
10) Если угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ больше 90° , то $\vec{a}\cdot\vec{b} > 0$.	
11) Если угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ меньше 90° , то $\vec{a}\cdot\vec{b} > 0$.	

- Выполните задание.

12) $ABCD$ – параллелограмм. $\vec{a}\cdot\vec{b} = ?$  Ответ: _____.	13) Найти $\vec{p}\cdot\vec{m}$.  Ответ: _____.	14) Определите, вид треугольника ABC: а) остроугольный; б) прямоугольный; в) тупоугольный, если $A(4;-4)$, $B(-4;0)$, $C(1;1)$. Ответ: _____.
--	---	--

ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ И ПЛОЩАДЬ КРУГА

ПРАВИЛЬНЫЙ МНОГОУГОЛЬНИК



Важно знать:

Правильным многоугольником называется выпуклый многоугольник, у которого все углы равны и все стороны равны.

Сумма углов правильного n -угольника равна $180^\circ \cdot (n - 2)$.

Величина α_n – угла правильного n -угольника вычисляется по формуле $\alpha_n = \frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ$.

• **Окружность** называется описанной около многоугольника, если все вершины многоугольника лежат на этой окружности.

Около любого правильного многоугольника можно описать окружность, и притом только одну.

• **Окружность** называется вписанной в многоугольник, если все стороны многоугольника касаются этой окружности.

В любой правильный многоугольник можно вписать окружность, и притом только одну. Окружность, вписанная в правильный многоугольник, касается сторон многоугольника в их серединах.

• Центр окружности, описанной около правильного многоугольника, совпадает с центром окружности, вписанной в тот же многоугольник.

• **Площадь правильного n -угольника** можно вычислить по формуле $S = \frac{1}{2} Pr$, где P – периметр, r – радиус вписанной окружности.

Задание 58. Заполните таблицу.

	Количество углов правильного n -угольника	Сумма углов правильного n -угольника	Величина угла правильного n -угольника
1)	10	$180^\circ \cdot (10 - 2) = 180^\circ \cdot 8 = 1440^\circ$	$\alpha_{10} = \frac{1440^\circ}{10} = 144^\circ$
2)	3		
3)	5		
4)	6		
5)	8		
6)	12		



Важно знать:

Для **правильного треугольника** (равностороннего треугольника) центр окружностей вписанной в этот треугольник и описанной около него – это точка пересечения его медиан (высот, биссектрис).

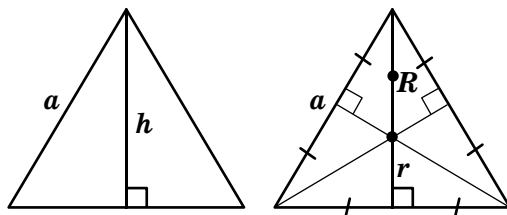
Для решения правильного треугольника со стороной a удобно использовать следующие формулы:

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} - \text{высота};$$

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3} - \text{радиус описанной окружности};$$

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6} - \text{радиус вписанной окружности};$$

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \text{площадь}.$$



Задание 59. Для правильного треугольника со стороной a заполните таблицу.

	a	периметр P	высота h	радиус вписанной окружности r	радиус описанной окружности R	площадь S
1)	7	$7 \cdot 3 = 21$	$\frac{7\sqrt{3}}{2}$	$\frac{7 \cdot \sqrt{3}}{6} = \frac{7\sqrt{3}}{6}$	$\frac{7 \cdot \sqrt{3}}{3} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$	$\frac{7^2\sqrt{3}}{4} = \frac{49\sqrt{3}}{4}$
2)	2					
3)			6			
4)				1		
5)					5	
6)		12				
7)						$9\sqrt{3}$
8)	$\sqrt{3}$					



Важно знать:

Для **правильного четырёхугольника** (квадрата) центр окружностей вписанной в этот четырёхугольник и описанной около него – это точка пересечения его диагоналей.

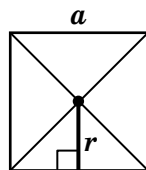
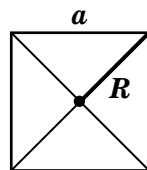
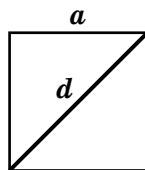
Для решения правильного четырёхугольника со стороной a удобно использовать следующие формулы:

$$d = a\sqrt{2} \text{ – диагональ;}$$

$$R = \frac{a\sqrt{2}}{2} \text{ – радиус описанной окружности;}$$

$$r = \frac{a}{2} \text{ – радиус вписанной окружности;}$$

$$S = a^2 = \frac{1}{2}d^2 \text{ – площадь.}$$



Задание 60. Для правильного четырёхугольника со стороной a заполните таблицу.

	a	периметр P	диагональ d	площадь S	радиус вписанной окружности r	радиус описанной окружности R
1)	3	$3 \cdot 4 = 12$	$3\sqrt{2}$	$3^2 = 9$	$3 : 2 = 1,5$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$
2)	4					
3)		40				
4)				25		
5)					1	
6)			2			
7)						10
8)	1					



Важно знать:

Для правильного шестиугольника центр окружностей вписанной в этот шестиугольник и описанной около него – это точка пересечения его больших диагоналей.

Для решения правильного шестиугольника со стороной a удобно использовать следующие формулы:

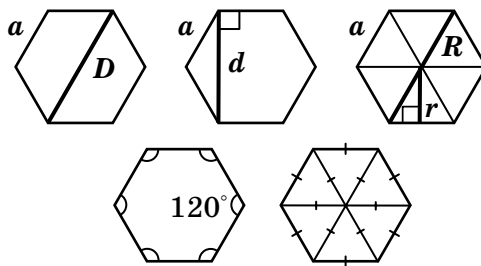
$D = 2a$ – большая диагональ;

$d = a\sqrt{3}$ – малая диагональ;

$R = a$ – радиус описанной окружности;

$r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ – радиус вписанной окружности;

$S = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}P \cdot r$ – площадь.



Задание 61. Для правильного шестиугольника со стороной a заполните таблицу.

	a	периметр P	площадь S	радиус вписанной окружности r	радиус описанной окружности R	большая диагональ D	малая диагональ d
1)	3	$3 \cdot 6 = 18$	$\frac{3 \cdot 3^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	3	$3 \cdot 2 = 6$	$3\sqrt{3}$
2)	4						
3)					2		
4)				3			
5)		30					
6)	$\sqrt{3}$						
7)		1					
8)		1					

Задание 62. ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ.

- Вставьте пропущенное слово/формулу.

1) Выпуклый многоугольник, у которого все углы равны и все стороны равны, называется _____ многоугольником.
2) Окружность называется _____, если все вершины многоугольника лежат на этой окружности.
3) Окружность называется _____, если все стороны многоугольника касаются этой окружности.
4) Центр окружности, описанной около правильного многоугольника, совпадает с _____ окружности, вписанной в тот же многоугольник.
5) Площадь правильного n -угольника можно вычислить по формуле _____, где P – периметр, а r – радиус вписанной окружности.

- Определите, верно ли утверждение.

	Да/нет
6) Правильного пятиугольника не существует.	
7) Сумма углов правильного четырёхугольника равна 360° .	
8) Ромб – это правильный четырёхугольник.	
9) Если в правильном треугольнике радиус описанной окружности равен 2, то радиус вписанной окружности равен 1.	
10) Периметр правильного шестиугольника со стороной, равной 6 см, равен 36 см^2 .	

- Выполните задание.

11) Треугольник ABC – правильный, $AB = 2$. Найдите: h – высоту, r – радиус вписанной окружности, R – радиус описанной окружности, S – площадь треугольника.	12) $ABCD$ – правильный четырёхугольник, $AB = 3$. Найдите: r – радиус вписанной окружности, R – радиус описанной окружности, S – площадь четырёхугольника.	13) Радиус вписанной окружности правильного шестиугольника равен $\sqrt{3}$. Найдите: a – сторону, R – радиус описанной окружности, S – площадь шестиугольника.
Ответ: _____.	Ответ: _____.	Ответ: _____.

ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ. ПЛОЩАДЬ КРУГА



Важно знать:

Отношение длины окружности к её диаметру есть одно и тоже число для всех окружностей.

Это число принято обозначать греческой буквой π («пи»), $\pi \approx 3,14$.

Формула для вычисления длины окружности $C = 2\pi R$, где C – длина окружности, R – радиус окружности.

Формула для вычисления длины дуги окружности $l = \frac{\pi R}{180^\circ} \cdot \alpha$, где l – длина дуги окружности, R – радиус окружности, α – градусная мера дуги окружности.

Задание 63. Заполните таблицу используя данные рисунка.

		длина окружности C	длина дуги l
1)		$2\pi \cdot 8 = 16\pi$	$\frac{16\pi}{360^\circ} \cdot 60^\circ = \frac{16\pi}{6} = \frac{8\pi}{3}$
2)			
3)			
4)			



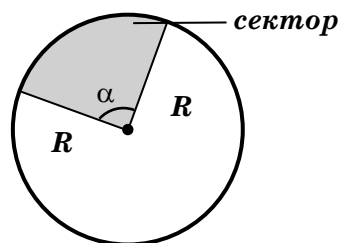
Важно знать:

Кругом называется часть плоскости, ограниченная окружностью.

Формула для вычисления площади круга $S = \pi R^2$, где S – площадь круга, R – радиус круга.

Круговым сектором или просто **сектором** называется часть круга, ограниченная дугой и двумя радиусами, соединяющими концы дуги с центром круга. Дуга, которая ограничивает сектор, называется **дугой сектора**.

Формула для вычисления площади кругового сектора
 $S = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot \alpha$, где S – площадь кругового сектора, R – радиус круга,
 α – градусная мера дуги окружности.



Задание 64. Заполните таблицу, используя данные рисунка.

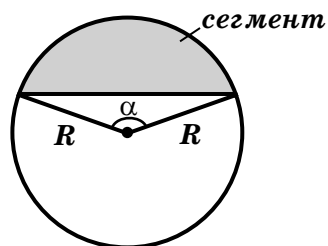
		Площадь круга S	Площадь сектора $S_{\text{сектора}}$
1)		$\pi \cdot 8^2 = 64\pi$	$\frac{64\pi}{360^\circ} \cdot 60^\circ = \frac{64\pi}{6} = \frac{32\pi}{3}$
2)			
3)			
4)			



Важно знать:

Круговым сегментом или просто **сегментом** называется часть круга, ограниченная дугой окружности и хордой, соединяющей концы этой дуги.

Чтобы найти площадь кругового сегмента, ограниченного дугой с градусной мерой $\alpha < 180^\circ$, можно из площади кругового сектора вычесть площадь равнобедренного треугольника, образованного радиусами круга и хордой.



Задание 65. Заполните таблицу, используя данные рисунка.

		площадь круга S	площадь сектора $S_{\text{сектора}}$	площадь $S_{\triangle AOB}$	площадь сегмента $S_{\text{сегмента}}$
1)		$2^2 \cdot \pi = 4\pi$	$\frac{4\pi}{360^\circ} \cdot 30^\circ = \frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sin 30^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$	$\frac{\pi}{3} - 1$
2)					
3)					
4)					



Указание: чтобы найти площадь сегмента, нужно из площади сектора вычесть площадь треугольника AOB; для нахождения площади треугольника воспользуйтесь формулой $S = \frac{1}{2} ab \sin \alpha$.

Задание 66. ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ.

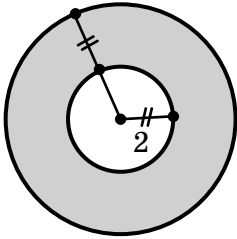
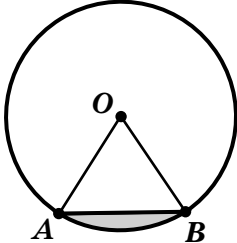
- Вставьте пропущенную формулу/букву.

1) Формула для вычисления длины окружности _____, где C – длина окружности, R – радиус окружности.
2) Формула для вычисления длины дуги окружности _____, где l – длина дуги окружности, R – радиус окружности, α – градусная мера дуги окружности.
3) Формула для вычисления площади круга _____, где S – площадь круга, R – радиус круга.
4) Формула для вычисления площади кругового сектора _____, где S – площадь кругового сектора, R – радиус круга, α – градусная мера дуги окружности.
5) Греческой буквой _____ принято обозначать отношение длины окружности к её диаметру, которое для всех окружностей одно и тоже число, приближённо равное _____.

- Определите, верно ли утверждение.

	Да/нет
6) Длина окружности равна произведению числа π на её диаметр.	
7) Длина окружности радиуса 4 см равна 4π см.	
8) Если градусная мера дуги окружности равна 90° , то длина этой дуги в четыре раза меньше длины окружности.	
9) Площадь круга радиуса 1 равна π .	
10) Площадь кругового сегмента всегда меньше площади круга.	

- Выполните задание.

11) Определите, сколько сторон имеет правильный многоугольник, угол которого равен 150°. Ответ: _____.	12) Найдите площадь закрашенной фигуры.  Ответ: _____.	13) Найдите площадь кругового сегмента, если известно, что треугольник AOB – правильный со стороной 2.  Ответ: _____.
--	---	---

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЛОСКОСТИ. ДВИЖЕНИЯ

ДВИЖЕНИЕ ПЛОСКОСТИ



Важно знать:

Любое преобразование плоскости, сохраняющее расстояние, называется **движением** (или **перемещением**) плоскости.

• При движении отрезок отображается на отрезок.

Следствие: • При движении треугольник отображается на равный ему треугольник.

• При движении любая фигура отображается на равную ей фигуру.

Некоторые виды движений:

параллельный перенос на заданный вектор;

поворот вокруг точки на заданный угол по часовой стрелке или против часовой стрелки;

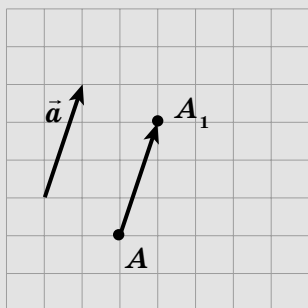
симметрия относительно прямой (осевая симметрия);

симметрия относительно точки (центральная симметрия).

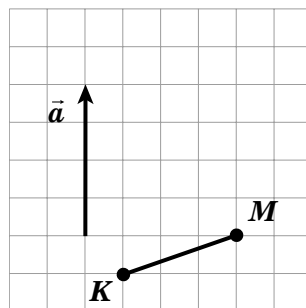
Преобразование плоскости, при котором каждая точка является неподвижной, называется **тождественным преобразованием**.

Задание 67. Постройте фигуру, в которую отображается данная при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$.

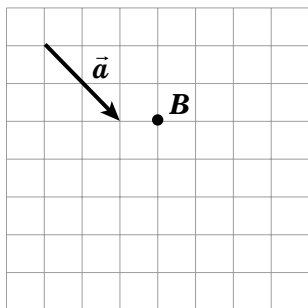
1)



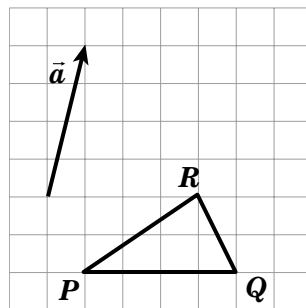
4)



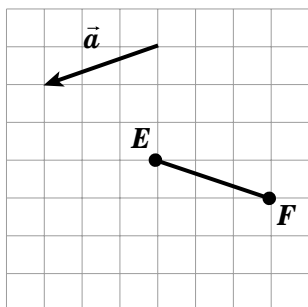
2)



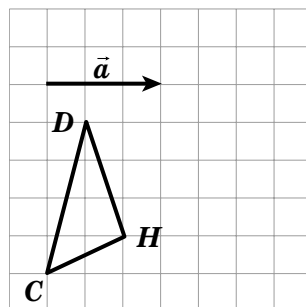
5)



3)

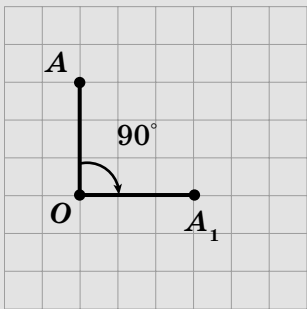


6)

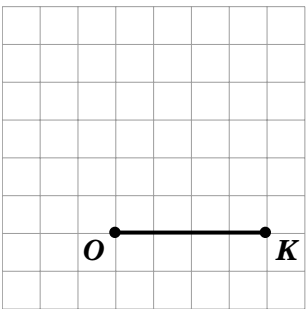


Задание 68. Постройте фигуру, в которую отображается данная при заданном повороте вокруг точки *O*.

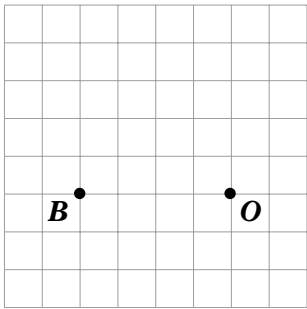
1) поворот на 90° по часовой стрелке



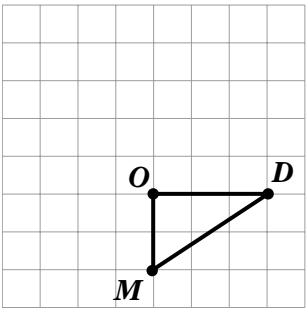
4) поворот на 90° против часовой стрелки



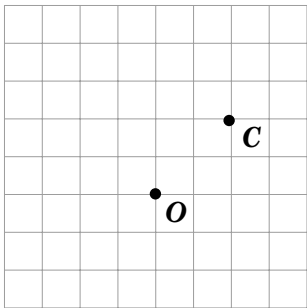
2) поворот на 90° по часовой стрелке



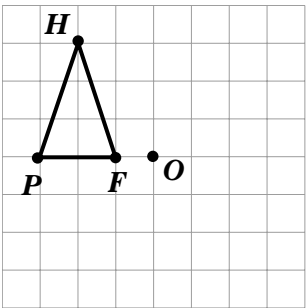
5) поворот на 180° по часовой стрелке



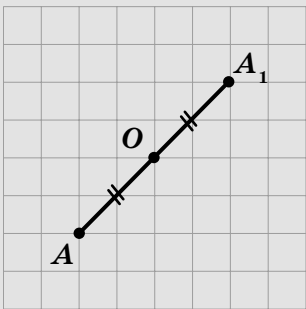
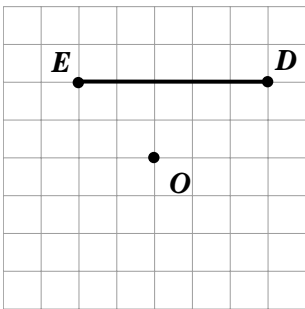
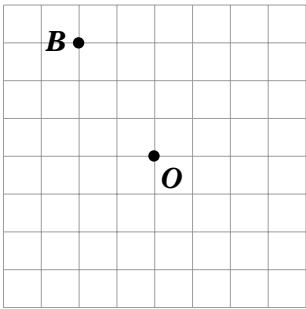
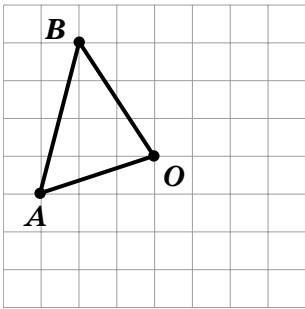
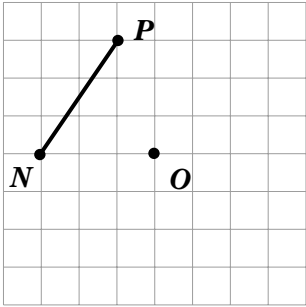
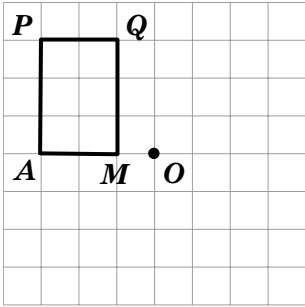
3) поворот на 90° против часовой стрелки



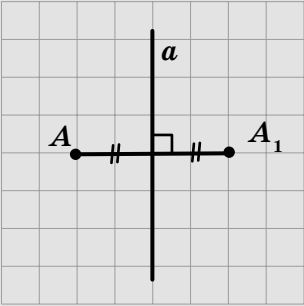
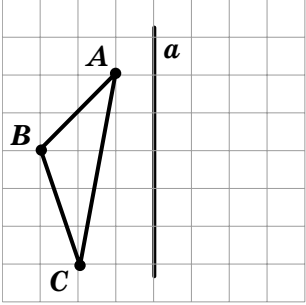
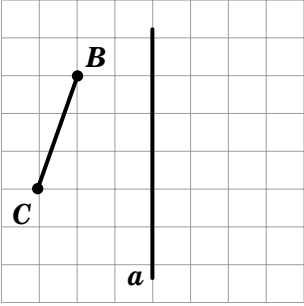
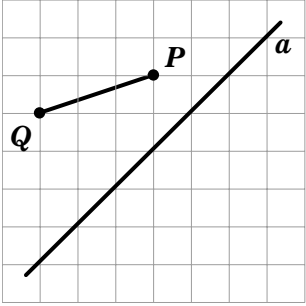
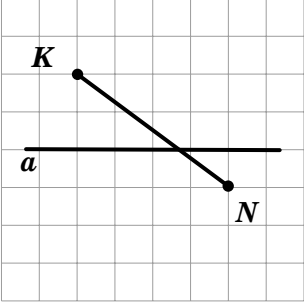
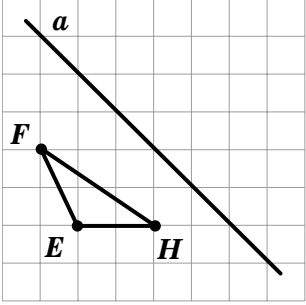
6) поворот на 180° против часовой стрелки



Задание 69. Постройте фигуру, в которую отображается данная при центральной симметрии с центром O .

1) 	4) 
2) 	5) 
3) 	6) 

Задание 70. Постройте фигуру, в которую отображается данная при осевой симметрии с осью a .

1) 	4) 
2) 	5) 
3) 	6) 

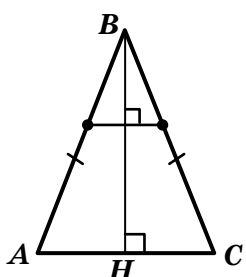
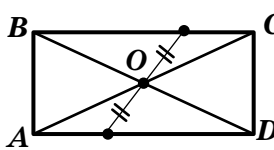
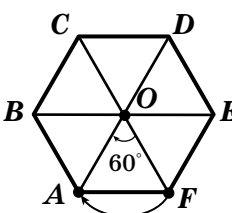
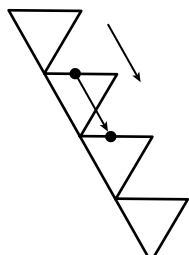
СИММЕТРИИ ФИГУР



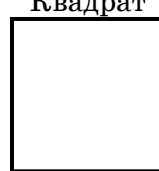
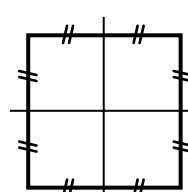
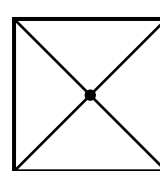
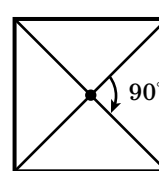
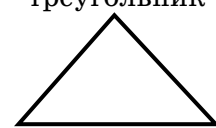
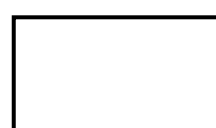
Важно знать:

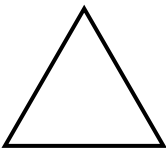
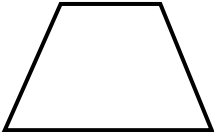
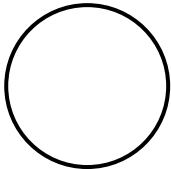
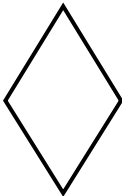
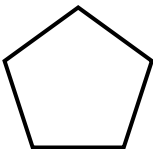
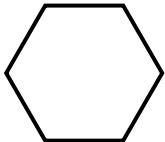
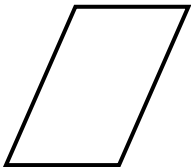
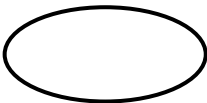
Внутренней симметрией (или симметрией) фигуры называется любое движение плоскости, отличное от тождественного преобразования, которое фигуру отображает на себя.

Виды симметрий фигуры:

Осевая симметрия  Ось симметрии равнобедренного треугольника – серединный перпендикуляр к основанию треугольника.	Центральная симметрия  Центр симметрии прямоугольника – точка пересечения его диагоналей.	Поворотная симметрия  Правильный шестиугольник имеет поворотную симметрию вокруг его центра на угол 60°, 120°, 180° и т.д. по часовой или против часовой стрелки.	Переносная симметрия  Фигура, состоящая из равных равнобедренных треугольников, (бордюр) имеет переносную симметрию.
---	---	---	--

Задание 71. Определите, имеет ли фигура приведённые виды симметрии. Приведите пример.

		Осевая симметрия	Центральная симметрия	Поворотная симметрия
1)	Квадрат 	Да 	Да 	Да 
2)	Равнобедренный треугольник 			
3)	Прямоугольник 			

4)	Равносторонний треугольник 			
5)	Равнобедренная трапеция 			
6)	Окружность 			
7)	Ромб 			
8)	Правильный пяти- угольник 			
9)	Правильный ше- стиугольник 			
10)	Параллелограмм 			
11)	Овал 			

Задание 72. ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ.

- Вставьте пропущенное слово.

1) Любое преобразование плоскости, сохраняющее расстояние, называется _____.
2) При движении отрезок отображается на _____.
3) При движении треугольник отображается на равный ему _____.
4) При движении любая фигура отображается на равную ей _____.
5) Внутренней симметрией (или симметрией) фигуры называется любое движение плоскости, отличное от тождественного преобразования, которое фигуру отображает на _____.

- Определите, верно ли утверждение.

	Да/нет
6) Каждая фигура имеет ось симметрии.	
7) Центральная симметрия – это поворот фигуры на 180° .	
8) Если фигура имеет ось симметрии, то она обязательно имеет и центр симметрии.	
9) Существуют фигуры, которые не имеют центра симметрии.	
10) Существуют фигуры, которые имеют бесконечно много осей симметрии.	

- Сколько осей симметрии имеет фигура? Изобразите их, если это возможно.

11) Правильный треуголь- ник	13) Правильный пятиуголь- ник	15) Круг
Ответ: _____.	Ответ: _____.	Ответ: _____.
12) Правильный четырёху- гольник	14) Правильный шестиу- гольник	16) Равнобедренный прямоу- гольный треугольник
Ответ: _____.	Ответ: _____.	Ответ: _____.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПОДОБИЯ. ПОДОБИЕ ФИГУР

ПОДОБИЕ МНОГОУГОЛЬНИКОВ. ГОМОТЕТИЯ



Важно знать:

• **Многоугольники называются одноимёнными**, если они имеют одинаковое число углов, а следовательно, и сторон.

• **Два многоугольника называются подобными**, если их углы соответственно равны, а сходственные стороны пропорциональны.

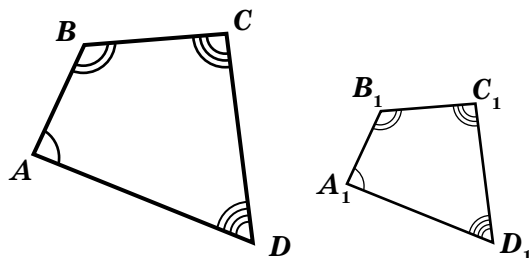
Число k , равное отношению сходственных сторон двух подобных многоугольников, называется **коэффициентом подобия** одного многоугольника относительно подобного ему многоугольника.

Пусть многоугольник $ABCD$ подобен многоугольнику $A_1B_1C_1D_1$.

Обозначается $ABCD \sim A_1B_1C_1D_1$.

Тогда, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $\angle D = \angle D_1$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{DA}{D_1A_1} = k$$



Два равных многоугольника подобны с коэффициентом $k = 1$.

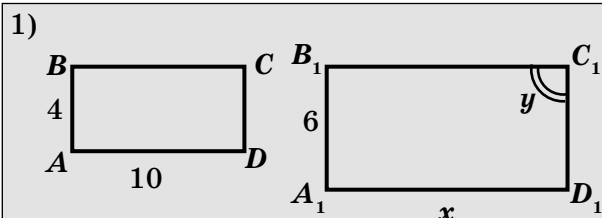
• **Отношение периметров** двух подобных многоугольников равно коэффициенту подобия многоугольников.

$$\frac{P_{ABCD}}{P_{A_1B_1C_1D_1}} = \frac{AB}{A_1B_1} = k$$

• **Отношение площадей** двух подобных многоугольников равно квадрату коэффициента подобия.

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{A_1B_1C_1D_1}} = \left(\frac{AB}{A_1B_1} \right)^2 = k^2$$

Задание 73. Известно, что фигуры, изображённые на рисунке, подобны. Найдите x и y .

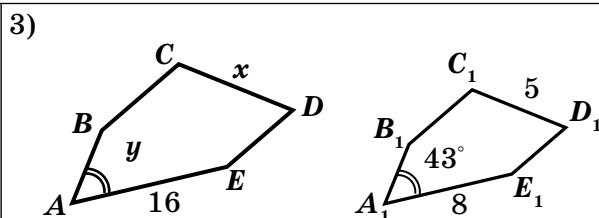


$ABCD \sim A_1B_1C_1D_1$, тогда

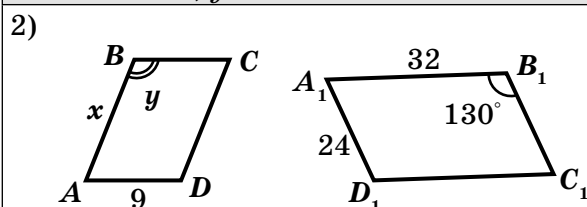
$$1) \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AD}{A_1D_1}, \frac{4}{6} = \frac{10}{x}, x = 15.$$

$$2) \angle C_1 = \angle C = 90^\circ, \text{ значит, } y = 90^\circ.$$

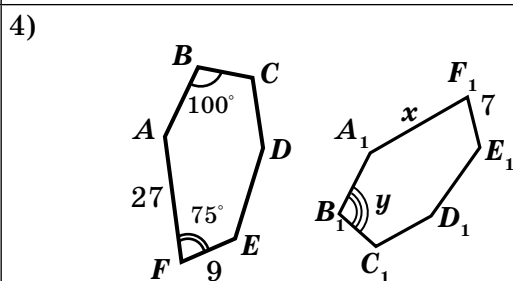
Ответ: $x = 15, y = 90^\circ$.



Ответ: $x = \underline{\hspace{2cm}}, y = \underline{\hspace{2cm}}$.



Ответ: $x = \underline{\hspace{2cm}}, y = \underline{\hspace{2cm}}$.



Ответ: $x = \underline{\hspace{2cm}}, y = \underline{\hspace{2cm}}$.

Задание 74. Заполните таблицу, зная, что две фигуры F_1 и F_2 подобны.

	a_1	a_2	Коэффициент подобия k	Отношение периметров $\frac{P_1}{P_2}$	Отношение площадей $\frac{S_1}{S_2}$
1)	8	24	$k = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$	$\frac{P_1}{P_2} = \frac{1}{3}$	$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$
2)	33	22			
3)	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{8}$			
4)	$\sqrt{6}$	$\sqrt{2}$			
5)	0,6	1,8			
6)	5	$\frac{5}{a_2} = \frac{1}{2},$ $a_2 = 10$	$k = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$	$\frac{P_1}{P_2} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
7)	3				$\frac{9}{25}$
8)		12	3		
9)		7		$\frac{5}{7}$	
10)	$\sqrt{5}$				$\frac{1}{5}$
11)		3	$\sqrt{3}$		



Важно знать:

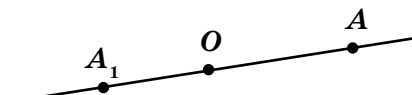
Гомотетией с центром O и коэффициентом $k \neq 0$ называется такое преобразование плоскости, при котором произвольно взятая точка A переходит в точку A_1 такую, что выполняется равенство $\vec{OA_1} = k \cdot \vec{OA}$.

O – центр гомотетии, k – коэффициент гомотетии.

$k > 0$



$k < 0$

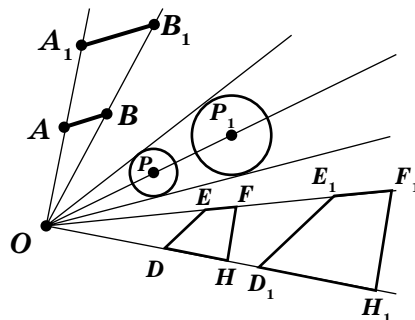


При $k = 1$ фигура переходит сама в себя.

При $k = -1$ центр гомотетии является центром симметрии.

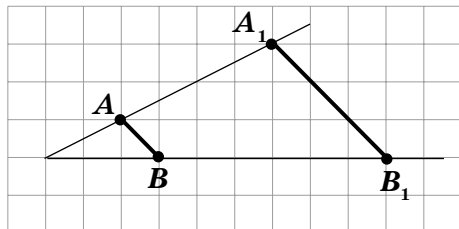
При гомотетии:

- прямая переходит в себя или в параллельную прямую;
- отрезок переходит в отрезок;
- окружность переходит в окружность;
- многоугольник переходит в подобный ему многоугольник.

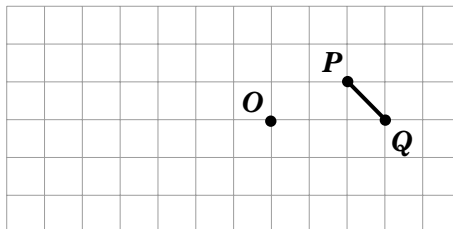


Задание 75. Постройте фигуру, гомотетичную данной, при гомотетии с центром O и коэффициентом гомотетии k .

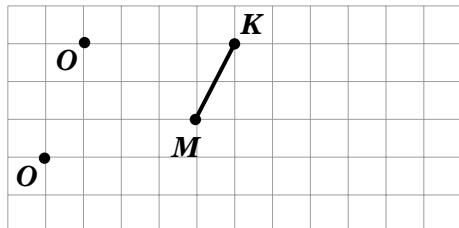
1) $k = 3$



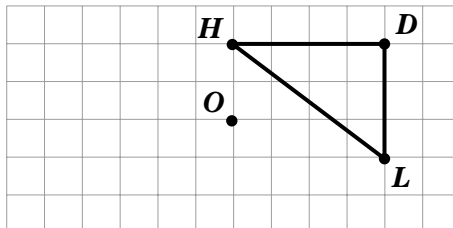
4) $k = -2$



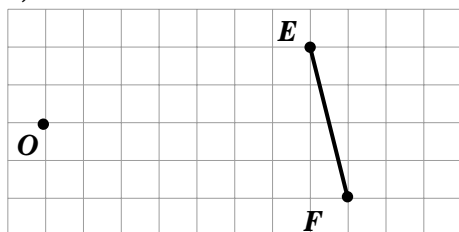
2) $k = 2$



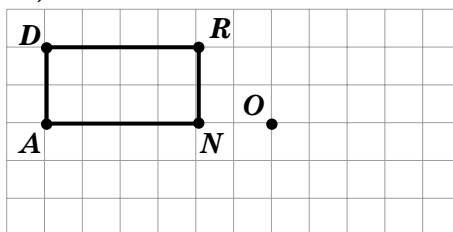
5) $k = -1$



3) $k = 0,5$



6) $k = -0,5$



Задание 76. ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ.

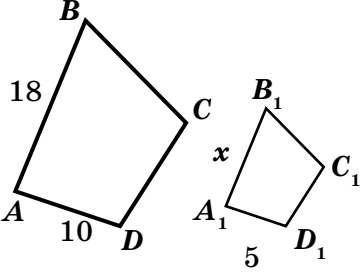
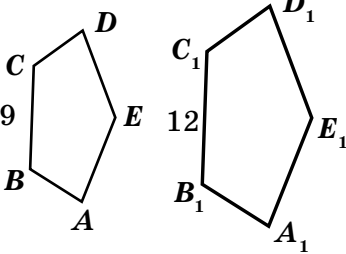
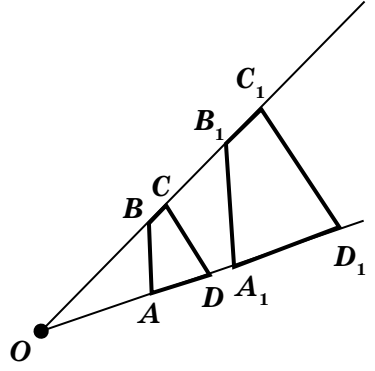
- Вставьте пропущенное слово/слова.

1) Многоугольники называются _____, если они имеют одинаковое число углов, а следовательно, и сторон.
2) Два многоугольника называются подобными, если их углы соответственно _____, а сходственные стороны _____.
3) Число k , равное отношению сходственных сторон двух подобных многоугольников, называется _____.
4) Отношение периметров двух подобных многоугольников равно _____.
5) Отношение площадей двух подобных многоугольников равно _____.

- Определите, верно ли утверждение.

	Да/нет
6) Если два многоугольника подобны, то их углы соответственно равны.	
7) Если углы одного многоугольника соответственно равны углам другого многоугольника, то такие многоугольники подобны.	
8) При гомотетии прямая переходит в перпендикулярную ей прямую.	
9) При гомотетии треугольник переходит в подобный ему треугольник.	
10) При гомотетии фигура переходит в подобную ей фигуру.	

- Даны две подобные фигуры. Найдите x .

11) $AD = 10$, $AB = 18$, $A_1D_1 = 5$, $A_1B_1 = x$. 	12) $CB = 9$, $C_1B_1 = 12$. $\frac{S_{ABCDE}}{S_{A_1B_1C_1D_1E_1}} = x.$ 	13) $OD = 8$, $OD_1 = 12$. k – коэффициент гомотетии. $k = x$. 
Ответ: _____.	Ответ: _____.	Ответ: _____.

ОТВЕТЫ

ВЕКТОРЫ

ПОНЯТИЕ ВЕКТОРА. ДЛИНА ВЕКТОРА

Задание 5.

А. 1) 5. 2) 13. 3) 6. 4) 4. 5) 2. 6) 3. 7) 10. 8) $\sqrt{2}$. 9) 4. 10) 7. 11) 6. 12) $\sqrt{2}$. 13) 5. 14) 7. 15) 3.
Б. 1) 3. 2) 5. 3) 3. 4) 10. 5) 5. 6) 11. 7) 6. 8) 12. 9) 6. 10) 5. 11) 10. 12) 3.

Задание 6. 1) вектором. 2) нулевой. 3) отрезка AB . 4) 0. 5) стрелкой. 6) да. 7) нет. 8) да. 9) нет. 10) да. 11) да. 12) $\vec{a}; \vec{MM}; \vec{KP}; \vec{DF}$. 13) 12. 14) 2, 5.

КОЛЛИНЕАРНЫЕ ВЕКТОРЫ. РАВЕНСТВО ВЕКТОРОВ

Задание 8.

А. 1) $\vec{a} = \vec{d}$. 2) $\vec{a} = \vec{p}$. 3) нет равных векторов. 4) нет равных векторов.

Б. 1) $\vec{AB} = \vec{DC}$. 2) $\vec{CD} = \vec{BA}$. 3) $\vec{BO} = \vec{OD}$. 4) $\vec{HB} = \vec{KC}$. 5) $\vec{AO} = \vec{OC}$.

В. 1) нет равных векторов. 2) $\vec{KO} = \vec{OH}$. 3) $\vec{BP} = \vec{LD}$. 4) $\vec{FK} = \vec{MA}$.

Задание 9. 1) одной; параллельных. 2) сонаправленными. 3) противоположные. 4) сонаправлены; равны. 5) отложить; один. 6) да. 7) нет. 8) да. 9) да. 10) да. 11) нет. 12) $\vec{a}$ и $\vec{e}$; $\vec{a}$ и $\vec{c}$; $\vec{c}$ и $\vec{e}$; $\vec{HN}$ и $\vec{a}$; $\vec{HN}$ и $\vec{e}$; $\vec{HN}$ и $\vec{c}$. 13) $\vec{n} = \vec{p}$; $\vec{k} = \vec{c}$.

СУММА ВЕКТОРОВ. ВЫЧИТАНИЕ ВЕКТОРОВ

Задание 17. 1) треугольника. 2) параллелограмма; параллелограмма. 3) равные; противоположные. 4) $\vec{a}$. 5) $(-\vec{b})$. 6) нет. 7) да. 8) да. 9) да. 10) нет. 11) да.

ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО

Задание 21. 1) $\vec{a} + \vec{b}$. 2) $\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$. 3) $\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}$. 4) $\vec{a} + \vec{b}$. 5) $\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$. 6) $\frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$.

Задание 22.

А. 1) 6. 2) 5. 3) 4, 5. 4) 3, 5. 5) $4\sqrt{2}$. 6) $3\sqrt{2}$. 7) 20. 8) 16. 9) 24.

Б. 1) 6, 5. 2) 10. 3) 6. 4) 4. 5) 10. 6) 11. 7) 3. 8) 20. 9) 15. 10) 12. 11) 24. 12) 32. 13) 13. 14) 7. 15) 3, 5. 16) 11.

Задание 23. 1) $|k| \cdot |\vec{a}|$. 2) $\vec{0}$. 3) $\vec{0}$. 4) середины боковых сторон. 5) основаниям; полусумме. 6) нет.

7) да. 8) да. 9) да. 10) нет. 11) нет. 13) $-\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$. 14) а) $\vec{MN} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$; б) 7.

МЕТОД КООРДИНАТ

КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА

Задание 28. 1) разложен. 2) координатными. 3) координатами; $\{x; y\}$. 4) $x_1 + x_2; y_1 + y_2$. 5) $x_1 - x_2; y_1 - y_2$. 6) $kx; ky$. 7) да. 8) да. 9) да. 10) нет. 11) нет. 13) $\{-3; -11\}$. 14) $\{-10; 4\}$.

ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ В КООРДИНАТАХ

Задание 30. 1) а. 2) а. 3) б. 4) б. 5) а. 6) а. 7) б. 8) а.

Задание 31. 1) $\sqrt{26}$. 2) $\sqrt{37}$. 3) 5. 4) $3\sqrt{10}$. 5) $\sqrt{26}$.

Задание 32. 1) (0; 7) 2) (5; 0) 3) (12; 5) 4) (0; 0) 5) (-3; 8).

Задание 33. 1) разности. 2) полусумме. 3) длина. 4) расстояние. 5) радиус-вектор. 6) да. 7) да. 8) нет. 9) нет. 10) нет. 11) $\{1; -7\}$. 12) (4; 6). 13) (2,5; -3). 14) -6. 15) нет.

УРАВНЕНИЯ ОКРУЖНОСТИ И ПРЯМОЙ

Задание 35. 1) да. 2) да. 3) нет. 4) да. 5) нет.

Задание 36. 1) $3x + 4y + 5 = 0$. 2) $2x - y + 1 = 0$. 3) $x - y + 2 = 0$. 4) $4x + 3y - 1 = 0$. 5) $2x - 3y + 1 = 0$.

Задание 37. 1) $y = 3x - 1$. 2) $y = 2x + 7$. 3) $y = 7$. 4) $y = \frac{1}{2}x$. 5) $x = -3$.

Задание 38. 1) окружности. 2) прямой. 3) угловым. 4) пересекаются. 5) параллельны. 6) нет. 7) нет. 8) да. 9) да. 10) нет. 12) да. 13) $y = 5x - 4$. 14) $y = 1; x = 3$. 15) $y = -2x - 1$.

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ТРЕУГОЛЬНИКА. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС, КОТАНГЕНС УГЛА

Задание 39.

А. 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 2) $\frac{1}{2}$. 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 4) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 5) 0. 6) $\frac{4}{5}$.

Б. 1) $-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}$. 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 3) 0. 4) 1. 5) $-\frac{3}{5}; \frac{3}{5}$. 6) $-\frac{\sqrt{5}}{3}$.

В. 1) 1. 2) $\frac{4}{3}$. 3) $-\sqrt{3}$. 4) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 5) $-\frac{5}{12}$. 6) 0.

Задание 40.

А. 1) 0,4. 2) 0,1. 3) $\frac{1}{3}$. 4) $-\frac{1}{4}$. 5) 0,3. 6) -0,7. 7) -2. 8) $\sqrt{3}$. 9) 2,5.

Б. 1) $\frac{4}{5}$. 2) 0,8. 3) $-\frac{5}{13}$. 4) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 5) -6. 6) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. 7) $\frac{4}{5}$. 8) $-\frac{5}{13}$. 9) 0,5. 10) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. 11) $-\frac{4}{3}$. 12) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 13) $-\frac{2}{5}$. 14) -1,5. 15) -0,8.

Задание 41. 1) ордината. 2) абсцисса. 3) тангенсом. 4) котангенсом. 5) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. 6) нет. 7) да. 8) да. 9) нет. 10) да. 11) $\frac{3}{5}$. 12) $-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}$. 13) $-\frac{3}{4}; -\frac{4}{3}$.

ТЕОРЕМА О ПЛОЩАДИ ТРЕУГОЛЬНИКА

Задание 42. 1) 10. 2) $\frac{9\sqrt{2}}{2}$. 3) $27\sqrt{3}$. 4) $7\sqrt{3}$. 5) 10. 6) 37,5. 7) 1. 8) 10,5. 9) 15. 10) 36. 11) 12. 12) 42.

13) 50. 14) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. 15) $18\sqrt{3}$. 16) 12. 17) -66. 18) 220. 19) $4\sqrt{3}$. 20) $3\sqrt{3}$.

Задание 43. 1) $56\sqrt{3}$. 2) 48 . 3) $\frac{21\sqrt{3}}{2}$. 4) 45 . 5) 6 . 6) $64\sqrt{2}$. 7) $2,25$. 8) 54 . 9) $5\sqrt{7}$. 10) $100\sqrt{3}$. 11) 100 . 12) $\frac{3}{2}$.

Задание 44. 1) треугольника. 2) параллелограмма. 3) диагоналей. 4) взаимно перпендикулярны. 5) нет. 6) нет. 7) да. 8) да. 9) нет. 10) $14\sqrt{3}$. 11) $12\sqrt{3}$. 12) 30 .

ТЕОРЕМА СИНУСОВ

Задание 45. 1) $7\sqrt{2}$. 2) $\sqrt{3}$. 3) 6 . 4) 5 . 5) 3 . 6) $10\sqrt{3}$. 7) 6 . 8) 30 .

ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ

Задание 47.

A. 1) 7 . 2) 8 . 3) 9 . 4) 16 . 5) 4 . 6) 7 .

B. 1) $\sqrt{19}$. 2) 5 . 3) 5 . 4) 7 . 5) $2\sqrt{5}$. 6) 7 . 7) $\sqrt{43}$. 8) $\sqrt{7}$.

B. 1) 5 . 2) 4 или 8 . 3) 1 или 3 . 4) 3 или 5 . 5) 8 . 6) 10 . 7) 6 . 8) 3 .

Задание 48. 1) $\frac{1}{8}$. 2) $\frac{5}{12}$. 3) $\frac{5}{6}$. 4) $\frac{1}{2}$. 5) $-\frac{1}{7}$. 6) $-\frac{1}{2}$. 7) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 8) $-0,19$.

Задание 49. 1) а. 2) а. 3) б. 4) а. 5) в. 6) б. 7) в. 8) б.

Задание 50. 1) синусам. 2) описанной. 3) косинус. 4) остроугольный. 5) прямоугольный. 6) тупоугольный. 7) нет. 8) нет. 9) да. 10) нет. 11) да. 12) 1 . 13) 3 . 14) в.

СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Задание 52. 1) 8 . 2) 18 . 3) $50\sqrt{3}$. 4) -32 . 5) $56\sqrt{2}$. 6) $14\sqrt{3}$. 7) -3 . 8) 25 .

Задание 54.

A. 1) 17 . 2) 20 . 3) -3 . 4) -3 . 5) 9 . 6) -5 . 7) 4 . 8) 3 .

B. 1) 9 . 2) 7 . 3) 4 . 4) -2 . 5) -9 . 6) -4 . 7) -4 . 8) -3 .

Задание 55. 1) 4 . 2) -8 . 3) -7 . 4) 8 . 5) 20 . 6) -12 . 7) 24 . 8) -21 .

Задание 56. 1) $\frac{3}{5}$. 2) $\frac{4}{5}$. 3) 1 . 4) $-\frac{1}{2}$. 5) $-\frac{1}{3}$. 6) $-0,6$. 7) 0 . 8) $\frac{\sqrt{2}}{10}$.

Задание 57. 1) взаимно перпендикулярными. 2) скалярным произведением. 3) $\vec{a} \cdot \vec{b}$. 4) длины.

5) $x_1x_2 + y_1y_2$. 6) $\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$. 7) нет. 8) да. 9) да. 10) нет. 11) да. 12) 35 . 13) 10 . 14) в.

ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ И ПЛОЩАДЬ КРУГА

ПРАВИЛЬНЫЙ МНОГОУГОЛЬНИК

Задание 62. 1) правильным. 2) описанной. 3) вписанной. 4) центром. 5) $S = \frac{1}{2}Pr$. 6) нет. 7) да. 8) нет.

9) да. 10) нет. 11) $\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{2\sqrt{3}}{3}; \sqrt{3}$. 12) $1,5; \frac{3\sqrt{2}}{2}; 9$. 13) $2; 2; 6\sqrt{3}$.

ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ. ПЛОЩАДЬ КРУГА

Задание 66. 1) $C = 2\pi R$. 2) $l = \frac{\pi R}{180^\circ} \cdot \alpha$. 3) $S = \pi R^2$. 4) $S = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot \alpha$. 5) π . 6) да. 7) нет. 8) да. 9) да. 10) да. 11) 12. 12) 12π . 13) $\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}$.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПЛОСКОСТИ. ДВИЖЕНИЯ

ДВИЖЕНИЕ ПЛОСКОСТИ

Задание 72. 1) движением. 2) отрезок. 3) треугольник. 4) фигуру. 5) себя. 6) нет. 7) да. 8) нет. 9) да. 10) да. 11) 3. 12) 4. 13) 5. 14) 6. 15) бесконечно много. 16) 1.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПОДОБИЯ. ПОДОБИЕ ФИГУР

ПОДОБИЕ МНОГОУГОЛЬНИКОВ. ГОМОТЕТИЯ

Задание 76. 1) одноимёнными. 2) равны; пропорциональны. 3) коэффициентом подобия. 4) коэффициенту подобия. 5) квадрату коэффициента подобия. 6) да. 7) нет. 8) нет. 9) да. 10) да. 11) 9. 12) $\frac{9}{16}$. 13) $\frac{2}{3}$.

*Минимальные системные требования определяются соответствующими
требованиями программ Adobe Reader версии не ниже 11-й
либо Adobe Digital Editions версии не ниже 4.5
для платформ Windows, Mac OS, Android и iOS; экран 10"*

Учебное электронное издание

Сиротина Т. В.

ГЕОМЕТРИЯ

9 КЛАСС

Тетрадь-тренажёр

Генеральный директор М. Б. Миндюк

Редактор Д. П. Локтионов

Художественный редактор Е. Ю. Воробьёва

Компьютерная вёрстка и макет Е. В. Лупенко

Подписано к использованию 27.12.24

Формат 19,0×28,0 см

Гарнитура SchoolBook

Издательство «Интеллект-Центр»

125445, Москва, ул. Смольная, 24А, этаж 7, пом. I, ком. 14

Тел.: (495) 660-34-53

Сайт: <https://www.intellectcentre.ru/>

Эл. почта: intellect@izentr.ru

**Электронное издание данной книги подготовлено
Агентством электронных изданий «Интермедиатор»**

Сайт: <http://www.intermediator.ru>

Телефон: (495) 587-74-81

Эл. почта: info@intermediator.ru

Издательство «Интеллект-Центр»

- Учебные материалы для подготовки к ЕГЭ, ОГЭ и ВПР
- Практикумы и дидактические материалы, сборники тестовых заданий
- Материалы для развития интеллектуальных способностей
- Учебные пособия, реализующие современные технологии в обучении и контроле знаний учащихся

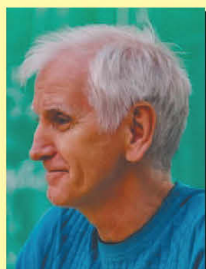
- **Покупайте наши пособия в электронном формате в интернет-магазине «Электронный универс»**
e-Univers.ru



КУРСЫ ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

(образовательная лицензия № 0411759 от 27.10.2021 г.):

«ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ ПРОФИЛЬНОГО УРОВНЯ: ТЕХНОЛОГИЯ ПОДГОТОВКИ» (72 часа).



Автор: Прокофьев Александр Александрович, доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой НИУ МИЭТ «Кафедра высшей математики – 1», председатель предметной комиссии по проверке ЕГЭ по математике г. Москвы в 2015–2020 гг., автор более 300 научных и учебно-методических публикаций.

«ОСОБЕННОСТИ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ, ОГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ» (36 часов).



Автор: Казарихина Татьяна Николаевна, кандидат педагогических наук, учитель математики и информатики высшей квалификационной категории, зам. директора АНО СОШ «Димитриевская», доцент кафедры теоретической информатики и дискретной математики МПГУ.

Форма обучения: заочная с применением ДОТ. Документ по окончании обучения: удостоверение о повышении квалификации установленного образца.

Подробнее о курсах можно узнать на сайте Издательства: www.intellectcentre.ru

Записаться на курсы можно:

- направив заявку на электронную почту: intellect@izentr.ru
- на сайте Издательства: <https://edu.intellectcentre.ru/>
- на сайте дополнительного профессионального образования педагогических работников города Москвы: <https://www.dpomos.ru/>

Издательство «Интеллект-Центр»

тел./факс: + 7 (495) 660-34-53

Ждём Ваших писем: 125445, г. Москва, ул. Смольная, д. 24А,

этаж 6, ком. 24 | e-mail: intellect@izentr.ru

www.intellectcentre.ru | vk.com/intellektcentre | t.me/izentr